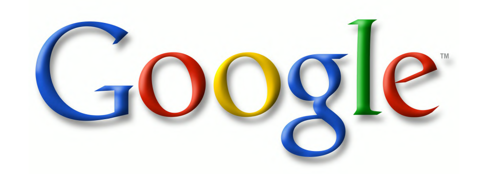
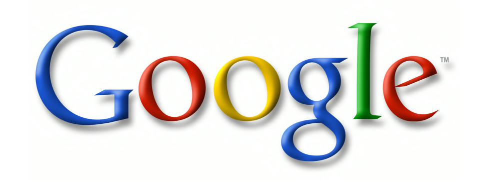
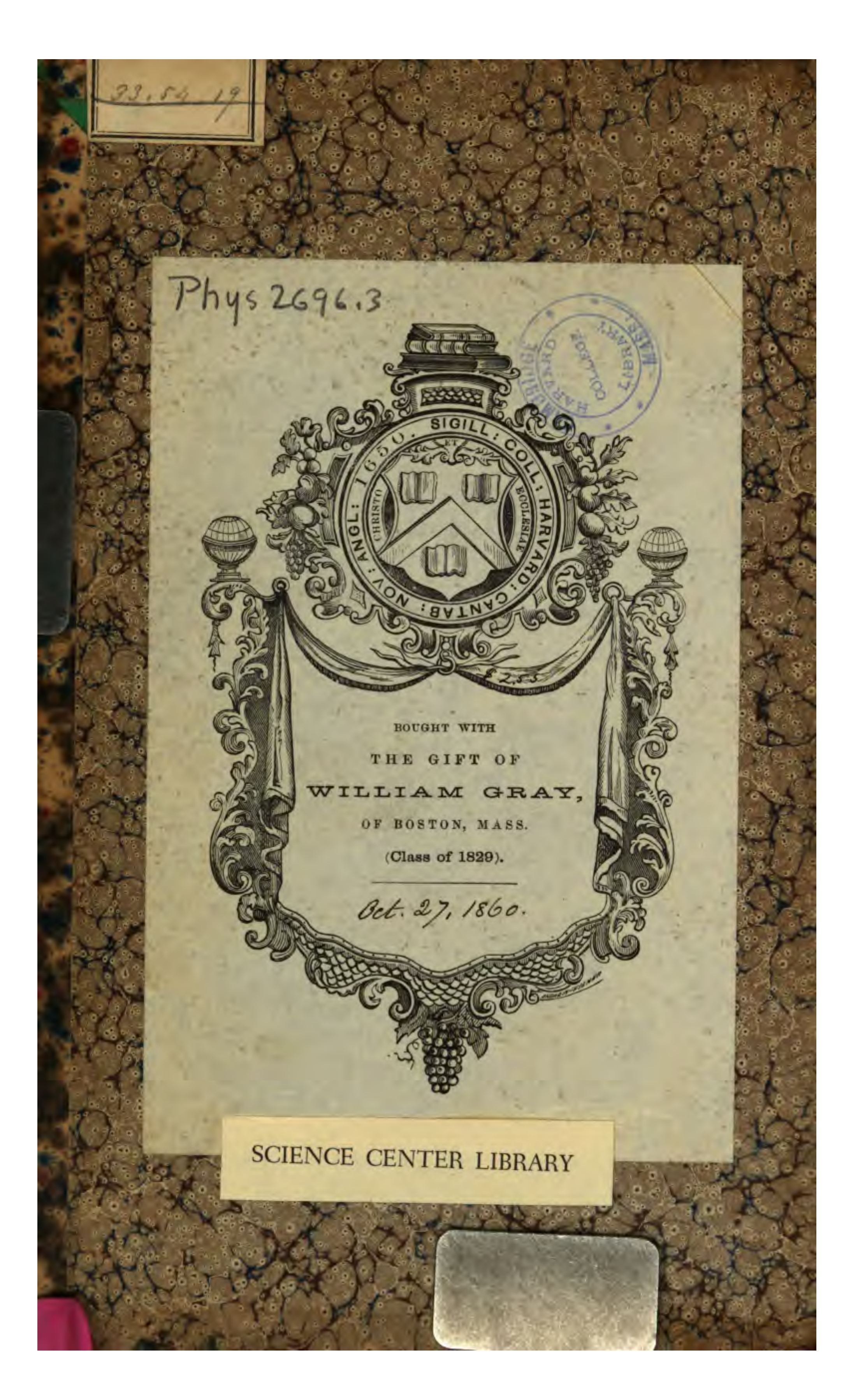








SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



INTRODUCTION

A LA

HAUTE OPTIQUE



Nancy, imprimerie de Grimblot, veuve Raybois et comp.

INTRODUCTION

A LA

HAUTE OPTIQUE

PAR

LE Dr AUGUSTE BEER

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BONN

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR M. C. FORTHOMME

Ancien élève de l'école normale, agrégé des sciences physiques, professeur de physique au lycée impérial de Nancy.

PARIS,
EMILE MELLIER,
LIBRAIRE,
Rue Pavée-St-André-des-Arts, 17.

NANCY,
GRIMBLOT, Ve RAYBOIS ET COMP.,
IMPRIMEURS-LIBRAIRES,
Place Stanislas, 7, et rue St-Dizier, 125.

1858

PRÉFACE DE L'AUTEUR.

Des divers agents naturels dont s'occupe la physique, la lumière se distingue par la netteté des phénomènes qu'elle produit et la précision avec laquelle on peut les étudier. De là, le double avantage d'intéresser à la fois à un haut degré le physicien et le mathématicien. C'est à cela qu'il faut attribuer le développement extraordinaire de l'optique et c'est aussi pourquoi cette partie de la science a pénétré si profondément dans les secrets de la nature. La théorie, constamment en action, coordonne d'une manière admirable des faits qui s'accumulent sans cesse, et donne au tout une forme qui permet d'en embrasser l'ensemble d'un coup-d'œil. Mais celui qui voudrait s'abandonner à l'attrait si naturel qu'offre l'étude de l'optique, regrette de ne pas trouver, dans l'état actuel de

cette science, un fil conducteur qui puisse le guider, par la voie la plus courte, des considérations les plus simples qu'on trouve dans les traités élémentaires de physique, aux développements sérieux et détaillés des écrits spéciaux qui surgissent chaque jour et abordent les questions d'optique les plus profondes et les plus délicates. C'est cette lacune que l'auteur essaye de combler avec les faibles forces dont il dispose. Ce livre a pour objet l'*étude des lois du mouvement lumineux normal.* Le développement de ces lois doit former la base de la haute optique à laquelle conduit leur étude. Voici la marche qui nous a paru la plus rationnelle.

Dans une *première partie,* de nature plus élémentaire, nous avons déduit des seules données de l'expérience les fondements de la théorie des ondulations de la lumière pour le cas simple des milieux isotropes. Les attributs du mouvement lumineux, la couleur, l'intensité, la polarisation y trouvent leur définition propre, leur caractère objectif. Les lois fondamentales de la catoptrique et de la dioptrique y sont établies théoriquement. Les différentes sortes de lumières (ce mot étant pris dans son acception la plus large) y sont nettement distinguées les unes des autres et on y indique les moyens de les étudier. Enfin dans un supplément se trouvent des tableaux relatifs à cette première partie et donnant les constantes optiques des milieux non cristallisés.

Dans la *seconde partie,* à l'aide de l'analyse mathématique, on déduit des principes de mécanique les lois du mouvement lumineux pour les milieux homogènes. L'étude spéciale de ces lois conduit à celle de la dispersion et de la double réfraction, et dans l'accord parfait de l'observation expérimentale des phénomènes avec les prédictions de la théorie, nous trouvons la sanction complète de cette dernière. Ici encore, nous avons ajouté toutes les constantes optiques des corps cristallisés déterminées jusqu'à présent.

Ce n'est pas à l'auteur de décider s'il a donné à ce traité physico-

mathématique la forme la plus convenable; mais il a la conscience d'avoir fait tous ses efforts pour exposer avec le plus de clarté possible les principes d'une science aussi délicate et en même temps aussi pleine d'intérêt.

A. BEER.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Étude synthétique du mouvement lumineux dans les milieux isotropes.

CHAPITRE I.

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DES ONDULATIONS.

CHAPITRE II.

PROPAGATION DE LA LUMIÈRE DANS UN MILIEU HOMOGÈNE ET ISOTROPE.

CHAPITRE III.

PASSAGE DE LA LUMIÈRE D'UN MILIEU ISOTROPE DANS UN AUTRE.

CHAPITRE IV.

NATURE DES VIBRATIONS LUMINEUSES DANS UN MILIEU ISOTROPE.

CHAPITRE V.

REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE DU MOUVEMENT LUMINEUX.

CHAPITRE VI.

INTERFÉRENCE DE LA LUMIÈRE POLARISÉE EN LIGNE DROITE.

CHAPITRE VII.

PHÉNOMÈNES PRODUITS PAR LA LUMIÈRE POLARISÉE ELLIPTIQUEMENT.

CHAPITRE VIII.

DE LA LUMIÈRE NATURELLE.

CHAPITRE IX.

INTENSITÉ.

CHAPITRE X.

LUMIÈRE PARTIELLEMENT POLARISÉE.

CHAPITRE XI.

APPAREILS FACILITANT L'ÉTUDE DE LA LUMIÈRE POLARISÉE.

SECONDE PARTIE.

Étude analytique et bases expérimentales des lois de la propagation de la lumière dans les milieux homogènes en général.

CHAPITRE I.

LOIS GÉNÉRALES DE LA PROPAGATION DE LA LUMIÈRE DANS LES MILIEUX HOMOGÈNES DÉDUITES PAR L'ANALYSE.

CHAPITRE II.

MILIEUX ISOTROPES. — LOI DE LA DISPERSION.

CHAPITRE III.

MILIEUX ANISOTROPES EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE IV.

SYSTÈMES CRISTALLINS.

Etude des lois générales de la lumière dans chaque système cristallin.

CHAPITRE V.

SYSTÈME CUBIQUE.

CHAPITRE VI.

SYSTÈME TÉTRAGONAL ET SYSTÈME HEXAGONAL.

Propagation de la lumière.

Phénomènes offerts par les lames cristallines à un axe.

CHAPITRE VII.

LOI DE LA DISPERSION DANS LES MILIEUX A UN AXE.

CHAPITRE VIII.

CRISTAUX SANS AXE PRINCIPAL. — SYSTÈMES ISOCLINIQUE, MONOCLINIQUE ET TRICLINIQUE.

CHAPITRE IX.

SURFACE DE L'ONDE DES CRISTAUX A DEUX AXES.

CHAPITRE X.

PASSAGE DE LA LUMIÈRE D'UN MILIEU ISOTROPE DANS UN CRISTAL A DEUX AXES.

CHAPITRE XI.

CONSTANTES OPTIQUES DES CRISTAUX A DEUX AXES.

CHAPITRE XII.

APPAREILS POUR FACILITER L'ÉTUDE DE LA LUMIÈRE DANS LES MILIEUX CRISTALLISÉS.

SUPPLÉMENT A LA PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION

A LA HAUTE OPTIQUE

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE DU MOUVEMENT LUMINEUX DANS LES MILIEUX ISOTROPES.

CHAPITRE I.

Principes fondamentaux de la théorie des ondulations.

La théorie de la lumière adoptée partout aujourd'hui (la théorie dite des ondulations ou des vibrations) présente une analogie presque complète avec celle du son, parce qu'il existe des rapports nombreux et intimes entre les phénomènes produits par les causes de ces deux sensations. Nous regardons la lumière comme le résultat du mouvement oscillatoire des molécules d'un milieu particulier, l'éther, qui se trouve répandu partout où se produit la lumière. Le corps lumineux détermine des vibrations dans les parties environnantes de l'éther : ce fluide, en vertu de son élasticité, transmet régulièrement ce mouvement dans les lieux les plus éloignés ; si l'œil est placé dans la direction de la propagation, il reçoit l'action de ce mouvement qui pénètre jusque dans son intérieur, et il éprouve la sensation dite lumineuse. C'est ainsi que le corps sonore excite les vibrations du milieu sonore ; l'élasticité de celui-ci les propage à travers les plus grandes distances jusqu'à l'oreille qui entend et reconnaît ainsi l'existence des vibrations. Poussant plus loin l'analogie entre le son et la lumière, nous cherchons la propriété *qualitative* de cette dernière dans la différence de durée des vibrations, et sa propriété *quantitative* dans l'amplitude des déplacements produits par la vibration : car on sait par l'expérience que l'acuité et la gravité d'un son, en un mot son caractère qualitatif, dépend de la durée des vibrations,

tandis que son intensité, sa propriété quantitative tient à leur amplitude. Par le mot *qualité* de la lumière nous entendons tout d'abord le mode d'impression qu'elle produit sur nos yeux et qu'on désigne sous le nom de *couleur*. Nous devons admettre en commençant, comme principe fondamental et l'expérience le confirme, que l'œil est limité dans la faculté de distinguer deux sources lumineuses dont la coloration est presque la même, comme l'est l'oreille pour comparer deux sons qui diffèrent très-peu l'un de l'autre. Nous sommes donc forcés de chercher un autre caractère qualitatif de la lumière, différent de la couleur et changeant avec elle, mais qui nous donne un moyen d'appréciation plus certain. Nous le trouvons dans la *réfraction*. Dans la dioptrique (que nous supposons ici connue, comme du reste les notions élémentaires d'optique), on démontre que les rayons différemment colorés ont une réfrangibilité différente. Partant de là, nous dirons que deux lumières, quand même l'œil regarderait leurs nuances comme identiques, diffèrent en qualité dès qu'elles présentent une différence dans leur réfrangibilité. Or on peut déterminer avec beaucoup de précision la grandeur de la réfrangibilité, l'indice de réfraction. *La réfrangibilité de la lumière est donc pour nous un caractère qualitatif, duquel il résulte que l'œil trouve presque la même nuance à deux rayons presque également réfrangibles, c'est-à-dire que les impressions qu'ils produisent sont pour ainsi dire les mêmes ; tandis qu'au contraire, si les rayons diffèrent sensiblement en réfrangibilité, l'œil les trouve aussi différemment colorés.*

De deux rayons de même couleur, de même réfrangibilité, l'un peut faire sur notre œil une impression plus forte que l'autre, et alors nous disons celui-là plus brillant, plus intense. Le plus ou moins de vivacité dans la sensation lumineuse, le degré de brillant, nous le désignerons en attendant par le mot *quantité* ou *intensité*, jusqu'à ce que par la suite nous puissions fixer cette idée d'une manière plus précise.

De même qu'à chaque bruit en général nous attribuons comme parties élémentaires constitutives un plus ou moins grand nombre de sons d'une qualité déterminée, de même nous considérons aussi les rayons lumineux doués d'une qualité déterminée comme ayant une existence propre, particulière, comme en un mot les éléments de toutes les lumières possibles. Nous admettons donc, ce que Newton a le premier découvert, la possibilité de décomposer chaque lumière par la réfraction en un nombre plus ou moins considérable de rayons élémentaires. Ces derniers, que par aucun moyen on n'a encore pu décomposer, nous les appelons *homogènes*, *élémentaires*, *monochromatiques*. Nos études porteront toujours en premier lieu sur de semblables rayons.

CHAPITRE II.

Propagation de la lumière dans un milieu homogène et isotrope.

Un corps qui en chacun de ses points a la même constitution physique est dit *homogène*. Nous ne nous occuperons ici que de pareils milieux. Un milieu homogène peut en outre être constitué en chaque point identiquement dans toutes les directions, ou bien présenter des propriétés différentes suivant les différentes directions. Parmi les premiers nous citerons, par exemple, l'air, l'eau, le verre. Ceux-ci, en effet, conduisent l'électricité aussi bien ou aussi mal dans tous les sens; dans tous les sens aussi ils sont également transparents, offrent la même cohésion, la même élasticité, etc. Mais il n'en est plus de même dans un cristal qui est un milieu de la seconde espèce. Un cristal de sel marin, par exemple, se laisse facilement diviser, mais seulement suivant trois directions parallèles à trois plans perpendiculaires entre eux; dans un cristal de tourmaline, les deux électricités se séparent par un changement de température, mais seulement dans la direction de l'axe principal cristallographique; un cristal de cordiérite paraît coloré soit en bleu, soit en jaune clair, suivant la direction dans laquelle la lumière le traverse, etc. Les milieux de la première sorte nous les nommons *isotropes :* à eux appartiennent les corps appelés *amorphes* dans leur état naturel. Les autres s'appellent *anisotropes* ou *hétérotropes :* cette seconde classe renferme les corps cristallins.

On découvrira les propriétés de la lumière d'une manière très-claire et le plus simplement possible dans les corps isotropes; c'est pourquoi nous nous occuperons d'abord de sa propagation dans les milieux de cette espèce où se manifestent les phénomènes lumineux, c'est-à-dire, qui sont diaphanes, d'autant plus que l'air, l'eau, le verre, le vide planétaire, qui en font partie, sont les corps dont on a le plus souvent occasion d'étudier les propriétés optiques.

Or, les questions qui se présentent d'abord relativement à la transmission de la lumière dans les milieux isotropes, sont celles-ci : 1° *quelle est la vitesse avec laquelle la lumière se propage?* 2° *quels changements éprouve-t-elle pendant sa propagation?* Commençons par résoudre la dernière. Plaçons à des distances différentes d'une bougie deux écrans égaux recouverts de papier blanc, et bientôt nous reconnaîtrons que l'écran le plus voisin paraît plus éclairé, s'ils sont surtout assez convenablement placés pour qu'il y ait une

différence appréciable dans l'éclairement. Cette différence sera d'autant plus sensible, que l'inégalité des distances des écrans à la source lumineuse sera plus grande par rapport à l'éloignement de l'écran le plus voisin. Si l'un d'eux est à un pied de la flamme et le second deux fois plus loin, leur éclat diffère déjà sensiblement. Mais si l'un des écrans est à douze pieds et l'autre seulement d'un pied plus éloigné, l'œil ne peut plus saisir aucune différence. Nous voyons donc d'après cela que la diminution de l'intensité par l'éloignement croissant de la source lumineuse, ne peut être attribuée à un affaiblissement de la lumière par la masse d'air traversée, à une absorption. S'il en était ainsi, en effet, il faudrait, dans les expériences citées plus haut, trouver dans le dernier cas où les écrans sont distants l'un de 12, l'autre de 13 pieds, une différence aussi sensible que lorsqu'ils sont distants de la flamme d'un et de deux pieds. *Cela tient donc plutôt à l'essence même du mouvement lumineux qui perd en quantité à mesure qu'il s'étend : et cet affaiblissement croît avec la distance au centre lumineux.* Cela s'accorde avec cette observation que la lumière du soleil, toutes choses égales d'ailleurs (sous le même angle d'incidence), tombant sur un écran, celui-ci est toujours également éclairé quand bien même on change sa distance au soleil des plus grandes longueurs qu'on puisse prendre à la surface de la terre. Dans ce cas, le rapport des distances de l'écran au soleil reste sensiblement le même, parce que les différences de ces distances sont toujours insignifiantes, comparées à la distance du soleil à la terre. Nous voyons en même temps par là que l'absorption de la lumière, au moins dans la limite de nos observations, est assez insensible pour que, dans les mêmes limites, nous puissions regarder l'air comme tout à fait transparent. Mais quant à accorder à l'air une transparence absolue, cela n'est pas permis, aussi bien par analogie avec d'autres milieux, que par des preuves directes du contraire que nous donne l'optique élémentaire. *Tous les milieux isotropes affaiblissent la lumière qui les traverse, parce que, par suite de leur structure, ils anéantissent, détruisent, absorbent une partie de sa quantité.* Le grand nombre d'observations faites sur l'absorption des milieux les plus divers nous autorise à admettre cette loi dans toute sa généralité. Nous nous contenterons à ce sujet de citer un exemple entre mille et d'en tirer les conséquences les plus importantes.

On sait qu'au moyen de l'oxyde de cobalt on peut colorer le verre en bleu plus ou moins foncé, suivant la quantité d'oxyde ajoutée à la matière vitrifiable. On peut obtenir une coloration si faible, qu'une feuille de l'épaisseur d'un carreau de vitre colore à peine la lumière blanche qui la traverse. Avec une feuille plus épaisse, la lumière devient bleu foncé et en même temps moins

intense. Si maintenant au moyen de la réfraction à travers un prisme on disperse cette lumière colorée en un spectre que l'on comparera à celui fourni par la lumière blanche naturelle, on ne trouvera dans le premier aucune couleur qui ne soit aussi dans le second, tandis qu'on reconnaîtra que dans le spectre de la lumière bleue les parties orangée, jaune et verte sont moins intenses comparativement aux autres, rouge, bleue et violette. Les rayons orangé, jaune et vert ont donc dans leur passage à travers le verre de cobalt été plus inégalement affaiblis que les autres parties de la lumière blanche, en sorte que ces dernières dominant dans la lumière qui a traversé le verre donnent à celle-ci une teinte bleue. D'un autre côté, on ne peut pas dire que les parties affaiblies l'ont été au passage de la lumière à travers les faces terminales de la plaque, car on voit qu'elles disparaissent à peine dans la lumière qui traverse une feuille mince, tandis que leur affaiblissement est d'autant plus prononcé que la feuille est plus épaisse. Il est évident, au reste, que les modifications que la lumière éprouve sur ces faces doivent être nécessairement les mêmes, quelle que soit l'épaisseur de la lame. La comparaison des deux spectres mentionnés plus haut fait bien voir que toutes les parties colorées constitutives de la lumière subissent, par leur passage à travers le verre de cobalt, une diminution dans leur intensité; et puisque la différence d'éclat des deux spectres augmente avec l'épaisseur croissante de la lame, il en résulte que cet affaiblissement commun a sa cause dans le chemin parcouru à l'intérieur du verre. De tout cela nous induisons les lois suivantes, dont la validité est assez démontrée par un grand nombre d'observations analogues à la précédente (1) :

1° *La lumière ne change pas sa qualité, en traversant un milieu isotrope;*

2° *Elle subit cependant par là, quelle que soit sa qualité, une perte en quantité par l'absorption que produit le corps traversé.* Cette perte croît graduellement avec le chemin parcouru, avec l'épaisseur du milieu. Sous une même épaisseur, la grandeur de la perte varie pour les différentes couleurs, si bien qu'en employant de la lumière blanche non colorée, certaines couleurs prédominent dans la lumière qui passe, tandis que d'autres disparaissent, et de là la coloration des divers milieux par transmission. D'après cela, il n'y a aucun corps absolument transparent et incolore, ni aucun corps absolument opaque. Le corps le plus diaphane serait coloré sous une épaisseur convenable, et paraîtrait opaque sous une épaisseur encore plus grande, de même que d'autre part un corps que nous appelons opaque paraîtrait coloré, transparent

(1) Voyez : Sur la nouvelle décomposition de la lumière solaire de sir David Brewster, par G. B. Airy. Ann. de Poggendorff. LXXI.

et même enfin incolore en feuille très-mince. Ainsi les nuages fort épais suspendus dans l'atmosphère colorent en rouge foncé la lumière du soleil, tandis que l'obsidienne qui en masse est noire et opaque est d'une couleur brunâtre en lame mince.

Admettant que le vide planétaire ne contient pas d'autre matière que l'éther, nous ne pouvons lui attribuer aucune absorption, et en effet l'observation ne nous en donne aucune preuve. Quant à savoir si l'éther ne change pas la qualité de la lumière pendant sa propagation, l'expérience nous démontre que les spectres fournis par la lumière du soleil réfléchie par les planètes n'offrent aucune partie intégrante autre que celles données par la lumière directe du soleil, et cela quelle que soit la position de la planète par rapport à la terre, quel que soit par conséquent le chemin qu'ait parcouru la lumière réfléchie. La planète Mars a une nuance rouge qui lui est propre, à quelque distance qu'elle se trouve de la terre.

Dans la suite nous ferons abstraction des effets de l'absorption; nous admettrons que les milieux que nous étudierons, sont, au moins dans les limites de nos recherches, tout à fait transparents et incolores, comme c'est le cas pour le vide, l'air, l'eau, le verre blanc. Il sera facile du reste dans chaque cas particulier, de tenir compte des changements que l'absorption apporterait dans les résultats obtenus.

Depuis longtemps on avait reconnu combien il serait important de savoir avec quelle vitesse la lumière se propage. L'académie de Florence fit des expériences pour résoudre cette question, mais elles restèrent sans résultats. Ce fut l'astronome danois Olaüs Römer (1675) qui le premier, en s'appuyant sur l'observation des éclipses des satellites de Jupiter, établit que *la lumière se meut dans le vide avec une vitesse finie, que cette vitesse pendant la propagation reste constante, et par conséquent que le mouvement est uniforme.* Il estima enfin que la grandeur de cette vitesse était d'environ 42,000 milles géographiques (1) par seconde. Quant à la méthode que Römer employa pour arriver à ce résultat, nous renvoyons aux ouvrages d'astronomie qui en traitent. Nous ferons de même pour un second procédé que nous offre encore l'astronomie. On peut en effet mesurer cette vitesse par l'observation de l'aberration des étoiles fixes, phénomène découvert en 1727 par Bradley. Plus récemment, Struve a obtenu par ce moyen une vitesse de 41,549 milles géographiques. Nous remarquerons en même temps ici, que le *phénomène de l'aberration donne dans le vide la même vitesse à la lumière, quelle que soit sa qualité.*

(1) Le mille géographique vaut 7420 mèt., 439.

Il était réservé à notre époque de mesurer la vitesse de la lumière à la surface limitée de notre globe. M. Fizeau, physicien français, l'a entrepris le premier, et est arrivé à un résultat satisfaisant (1). Nous allons donner la description de son ingénieux procédé. Deux lunettes astronomiques F et F'

Fig. 1.



d'une ouverture de 6 centimètres étaient placées à une distance d'environ 8 kilomètres, et de manière que leurs axes optiques se confondant, l'objectif de l'une était aperçu distinctement au moyen de l'autre, c'est-à-dire que les images respectives des objectifs se formaient aux foyers f et f'. La lunette F portait latéralement un tube t muni de deux lentilles l et l', sur la première desquelles tombait la lumière d'une forte lampe S. Entre l'oculaire Oc et le foyer f était une lame de verre parfaitement plane, inclinée de 45° sur l'axe de la lunette, tandis qu'au foyer f' de la seconde lunette se trouvait un miroir métallique m. Les lentilles l et l' sont disposées de telle manière que les rayons qu'elles réfractent vont, après leur réflexion sur la lame g, former au foyer f une petite image de la flamme. Les rayons partant du foyer f, rendus parallèles par l'objectif Ob, tombent après avoir parcouru une distance d'environ 8 kilomètres sur l'objectif Ob', et vont de là former au foyer f' une petite image. Réfléchis de nouveau par le miroir m, ils reprennent une direction en sens contraire et viennent enfin, après avoir une seconde fois parcouru les 8 kilomètres, former en f une petite image brillante qui de son côté, observée à travers la plaque g au moyen de l'oculaire Oc, fait l'effet d'une étoile éloignée. Au foyer f passaient les dents d'une roue R, qui en portait 720, dont l'axe

(1) Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1849.

était parallèle à l'axe commun des lunettes, et qui traversait en *q* la paroi de la lunette *F*. Au moyen d'un poids on imprimait à cette roue un mouvement de rotation uniforme, dont la vitesse était mesurée exactement au moyen d'un compteur. Supposons la roue *R* en repos, et placée de telle sorte que le foyer *f*

Fig. 2.



se trouve dans l'intervalle qui sépare deux dents. La lumière partie du point *f*, va en *f'*, revient en *f*, et fait là l'effet d'un point lumineux. Mais pendant que la lumière fait le chemin de *f* en *f'*, puis revient en *f*, si la roue tourne assez vite pour qu'une des dents voisines de *f* vienne en *f*, alors évidemment la lumière qui revient ne sera pas perçue par l'œil placé en *Oc*, et aucun point lumineux ne se sera vu en *f*. Il est clair que la même chose se reproduira si l'on communique à la roue une vitesse constante telle que toujours, pendant que la lumière va de *f* en *f'* et revient réciproquement de *f'* en *f*, il passe par *f* une partie de la circonférence de la roue qui y ramène une dent. Imprime-t-on à la roue une vitesse double de celle supposée plus haut, alors la lumière qui en partant de *f*, a traversé l'intervalle entre deux dents, retrouve à son retour un nouvel intervalle, situé par rapport au premier en sens inverse du mouvement de rotation : par conséquent il paraîtra en *f* un point brillant aussi souvent qu'un intervalle libre passera dans l'axe de l'instrument. Ces passages se succédant très-rapidement, un œil placé devant *Oc* verra un point lumineux stationnaire d'un éclat constant tant que la vitesse de la roue ne changera pas. La vitesse angulaire passe-t-elle du double au triple de sa valeur primitive, de nouveau le point brillant disparaît en *f*, et ainsi de suite. M. Fizeau a nettement observé l'apparition et la disparition alternatives du point lumineux en *f* pour une vitesse croissante de la roue.

Les lunettes étaient à une distance de 8,633 mètres, et dans une expérience le point lumineux disparut pour la première fois lorsque la roue faisait 12,6 tours en une seconde. Alors la lumière partant de f entre deux dents rencontrait à son retour celle des deux dents formant l'intervalle situé du côté opposé au sens de la rotation. Donc il passait en f une dent ou un intervalle en $\frac{1}{12,6 \times 2 \times 720}$ de seconde, tandis que la lumière, dans le même temps, parcourrait un espace de deux fois 8633 mètres. De ces données on peut facilement déduire la vitesse de la lumière. M. Fizeau répéta l'expérience 28 fois, et donna pour valeur moyenne une vitesse de 70948 lieues de 25 au degré. Ce nombre s'écarte fort peu $\left(\text{de } \frac{1}{44}\right)$ de celui obtenu par les observations astronomiques.

Les expériences de M. Fizeau n'ayant pas atteint encore tout le degré possible d'exactitude, nous leur préférerons les mesures astronomiques; elles nous autorisent toutefois à admettre que *la lumière se propage dans l'air avec une vitesse constante et sensiblement la même que dans le vide.*

D'après la théorie des vibrations, comme nous le verrons plus tard, la lumière doit avoir une vitesse moindre dans l'air que dans le vide, et les vitesses dans ces deux milieux doivent être entre elles comme 1 : 1,000294. Or d'après les remarques qui précèdent et parce que ce dernier rapport est très-peu différent de l'unité, il est évident que nous ne devons pas attribuer quelque valeur contre cette théorie, à la circonstance que M. Fizeau a trouvé une vitesse un peu plus grande dans l'air que celle que l'astronomie donne dans le vide : aussi nous nous contenterons de tirer des essais de M. Fizeau la conséquence indiquée plus haut.

Le rapport 1 : 1,000294 n'est rien autre chose que l'indice de réfraction de la lumière en passant de l'air dans le vide. La théorie des ondulations déduit en effet de ses principes, que le rapport de la vitesse de la lumière dans le milieu A à sa vitesse dans un second milieu B est égal à l'indice de réfraction de la lumière passant de A dans B. Une preuve directe de cette loi serait un ferme appui pour la théorie, et ce serait déjà le cas de la citer ici, car elle donnerait un éclaircissement important sur la propagation de la lumière dans un milieu isotrope. M. Foucault est parvenu à résoudre cette question, ou au moins l'a circonscrite dans certaines limites (1). De ses belles recherches il résulte indubitablement que *la lumière se propage dans l'eau avec une*

(1) Comptes rendus. Mai 1850.

vitesse constante et moindre que dans l'air, et que le rapport des vitesses dans ces deux milieux est exprimé par l'indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air, abstraction faite de petites différences dues aux différences de qualité de la lumière. Ce qui suit servira à donner une idée de la manière dont la recherche a été faite.

M. Foucault fait arriver la lumière solaire par une ouverture carrée *Oo*



Fig. 3.



de 2 millim. de côté, et lui fait traverser ensuite un châssis vertical *rr*, lequel consiste en fils de platine fins et parallèles, tendus assez près les uns des autres pour qu'il y en ait 11 dans une étendue d'un millimètre. De là la lumière arrive sur une lunette achromatique *F*, puis tombe sur un miroir vertical *ss*, qui au moyen d'une petite turbine à vapeur comparable à la syrène reçoit un mouvement très-rapide autour d'un axe vertical *C*. La vitesse de rotation, qu'on peut faire varier de 30 à 800 tours, est estimée par la hauteur du son que l'appareil fait entendre en tournant. Réfléchie par le miroir *ss*, la lumière tombe sur un petit miroir concave *mm*, dont le centre de courbure est en *C* : son rayon de courbure a environ 4 mètres. La lunette *F* et ses lentilles sont disposées de manière à former sur *mm* l'image du châssis *rr*. La lumière de nouveau réfléchie par le miroir *mm*, suit dans une direction tout à fait opposée le chemin qu'elle avait déjà parcouru, et elle forme en *rr* une image du châssis, qui coïncide avec le châssis lui-même. Mais si, pendant le temps très-court que la lumière qui a frappé le miroir *ss* met à aller de *ss* en *mm* et à revenir en *ss*, le miroir *ss* tourne subitement en $s' s'$ de l'angle α, alors les rayons qui reviennent ne seront plus reflêchis en *rr* par *ss*, mais ils le seront de manière à faire quelque part en $r' r'$ une image du châssis qui sera plus ou moins éloignée de ce dernier dans le sens de la rotation du miroir. Le rayon qui arrive par exemple dans la direction ρC, ne suit plus à son retour le chemin $C\rho$, mais bien $C\rho'$, faisant avec le premier un angle 2α. Ce que nous

disons de ρC s'applique évidemment à chaque rayon traversant *rr*. L'image $r' r'$ du châssis est donc déplacée par rapport au châssis lui-même, dans la direction de la rotation du miroir, d'un angle qui est le double de celui dont a tourné *ss*. Il est maintenant évident que, si le miroir tourne d'une manière continue et avec une vitesse telle qu'il décrive l'angle α pendant que la lumière va de *ss* en *mm* et réciproquement, toute la lumière réfléchie par *mm* et tombant de nouveau sur *ss* est déviée d'un angle 2α dans le sens de la rotation. Pour chaque rotation complète l'image $r'r'$ existera donc aussi longtemps que les rayons renvoyés par *ss* rencontreront le miroir concave *mm*, ce qui du reste sera un temps très-court, car, ainsi que cela doit être, *mm* est petit, tandis que la vitesse de rotation est très-grande. Un œil placé en $r'r'$ ne recevant que les rayons de l'image, ne la verrait pas pendant une seule rotation à cause du peu de durée de l'impression. Mais si le miroir tourne d'un mouvement uniforme, continu, chaque impression se répétant rapidement d'une manière tout à fait identique, l'image devient perceptible. Afin de pouvoir saisir les rayons qui concourent à la former et aussi pour pouvoir observer sa position par rapport au châssis *rr*, entre ce dernier et la lunette *F* est placée une lame de verre à faces parallèles *gg* (fig. 4) verticale et inclinée sur l'axe de la lunette. Elle réfléchit sur chacune de ses faces f_1 et f_2 les rayons qui forment l'image $r'r'$, en sorte qu'ils se réunissent pour former deux images ($r'_1\ r'_1$ et $r'_2\ r'_2$) qui sont symétriques de $r'\ r'$ par rapport à chacune des faces réfléchissantes de la glace. Si le miroir *ss* est en repos, auquel cas $r'\ r'$ tombe juste sur *rr*, ces images sont exactement devant le châssis vertical vu à travers la lame de verre. Mais d'après les considérations précédentes, si le miroir tourne, ces mêmes images doivent paraître rejetées à droite ou à gauche de *rr*. La grandeur de la déviation, toutes les autres circonstances étant les mêmes, est proportionnelle à la vitesse angulaire du miroir *ss*, et

Fig. 4.



pour une même vitesse angulaire, elle est aussi proportionnelle au temps que la lumière met à parcourir le chemin de *ss* en *mm*, ou, ce qui est la même chose, elle est inversement proportionnelle à la vitesse avec laquelle ce chemin est parcouru. Pour observer plus exactement la déviation, le châssis *rr* et les images réfléchies par *gg* étaient vus au moyen d'une lunette F', en même temps que la lame de verre était tournée de telle façon que les fils de l'image $r_1' r_1'$ tombant sur ceux de l'image $r_2' r_2'$, ces deux images n'en fissent plus qu'une seule d'un éclat double. Pour mesurer la grandeur de la déviation on faisait usage d'un appareil micrométrique, au moyen duquel l'image et le châssis *rr* pouvaient être amenés à coïncider. M. Foucault observa alors sans aucune équivoque une déviation dans le sens prévu de 0,01 de millimètre, quand le miroir faisait environ 30 tours par seconde et que la lumière parcourait entre *ss* et *mm* un chemin de 4 mètres. La déviation augmenta quand la lumière venant de *ss* et avant de tomber sur *mm* traversait une colonne d'eau contenue dans un tube fermé aux deux extrémités par des glaces à faces parallèles ; et en calculant le rapport des chemins parcourus par la lumière et allant de *ss* en *mm* et réciproquement, tantôt dans l'eau, tantôt dans l'air, il trouva que, toutes choses égales d'ailleurs, le rapport de la déviation produite par l'eau à celle due à l'air est égal à l'indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air. Il résulte incontestablement des recherches de M. Foucault, que la lumière se meut plus lentement dans l'eau que dans l'air, et que sa vitesse dans l'air est à sa vitesse dans l'eau comme l'indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air est à l'unité, ou ce qui est la même chose d'après la dioptrique, comme les indices absolus de réfraction de l'eau et de l'air. Par indice de réfraction absolu d'un milieu on entend, en dioptrique, l'indice de réfraction du milieu en question par rapport au vide.

Ces résultats suffisent pour nous donner une idée nette du fait général de la propagation de la lumière dans un milieu isotrope, et dès lors, guidés par l'analogie, nous pouvons les généraliser.

Supposons qu'en un point d'un milieu isotrope se produise de la lumière homogène. En ce point, les vibrations que nous supposons se suivre sans interruption, pour produire un rayonnement lumineux continu, se propagent dans toutes les directions avec une vitesse constante et sans que leur durée soit altérée. Nous représentons celle-ci par *d*, la vitesse de la lumière par *v* et le point brillant, le centre du mouvement lumineux par *P*. Au bout du temps *d*, à partir du commencement de la première vibration, toutes les parties de l'éther en mouvement sont circonscrites dans une sphère dont le centre est *P*

et dont le rayon est égal à *vd*; c'est-à-dire, à l'espace parcouru par la lumière pendant la durée d'une vibration. Les molécules d'éther sur la surface de la sphère sont sur le point de commencer leur vibration, tandis que celles qui sont enfermées dans l'intérieur de la sphère en ont déja accompli une plus ou moins grande partie. La portion de la vibration faite est d'autant plus grande, que les molécules sont plus voisines du point *P* : ainsi, par exemple, celles qui sont éloignées de *P* de $\frac{vd}{2}$ se trouvent à la moitié de leur vibration, les molécules dont l'éloignement est $\frac{vd}{4}$ en ont fait les trois quarts; enfin au point *P* lui-même la vibration est achevée. En général les molécules dont la distance au point *P* est $\frac{vd}{n}$ ont encore à osciller pendant un temps $\frac{d}{n}$ pour arriver à la fin de leur vibration. Nous voyons aussi par là, que toutes les molécules qui sont sur une sphère dont le centre est en *P*, se trouvent en même temps dans la même période de leur vibration. Le mouvement se propage avec le temps; une plus grande quantité d'éther entre en vibration. D'abord les molécules qui avoisinent la sphère-limite dont nous venons de parler, commencent à osciller, pendant que celles qui sont dans la sphère achèvent leur première vibration, et au point *P* lui-même commence la seconde. L'état vibratoire, tel qu'il existait à la fin de la première vibration en un point quelconque d'une sphère dont le rayon est moindre que *vd*, se communique successivement avec une vitesse égale aux molécules de sphères de plus en plus grosses, dont le centre reste continuellement en *P*. A la fin de la deuxième vibration, après le temps 2 *d*, à partir du moment où la lumière a commencé, les molécules dont les distances au point *P* sont 2 *vd*, $1\frac{3}{4}$ *vd*, $1\frac{1}{2}$ *vd*, $1\frac{1}{4}$ *vd*, et *vd* sont au même moment de leur vibration que l'étaient à la fin de la première celles dont les distances sont *vd*, $\frac{3}{4}$ *vd*, $\frac{1}{2}$ *vd*, $\frac{1}{4}$ *vd*, et 0. Depuis les molécules de la sphère de rayons 2 *vd*, jusqu'à celles de la sphère de rayon *vd*, se répètent ainsi les mêmes états vibratoires que nous avons vus à la fin de la première vibration dans les molécules situées depuis la distance *vd*, jusqu'au point *P*. Mais ces dernières particules elles-mêmes se trouvent à la fin de la première et à la fin de la seconde vibration dans la même époque de vibration, puisque doivent se répéter pour elles, depuis la fin de la première jusqu'à la fin de la deuxième, les mêmes états qui avaient existé du commencement de la première jusqu'à sa fin.

Le caractère du mouvement étudié consiste donc en ce que les différents états vibratoires du point *P*, se reproduisant dans des périodes égales, se dis-

tribuent avec une vitesse constante v aux particules qui se trouvent sur des sphères de plus en plus grandes dont le centre commun est le point brillant P. D'après cela il est facile de déterminer l'état dans lequel se trouve l'éther après un temps quelconque t. La limite du mouvement lumineux est la sphère de rayon vt. Toutes les périodes de vibrations se succèdent depuis les points de cette surface sphérique jusqu'à ceux d'une autre plus petite concentrique d'un rayon $vt—vd$. Quand les particules de la première surface vont commencer à vibrer celles de la dernière ont achevé leur première vibration. Ces périodes se répètent absolument de la même manière dans les particules qui se trouvent dans l'enveloppe limitée par la dernière surface sphérique précédente de rayon $vt—vd$ et une seconde de rayon $vt—2\,vd$. Mais, sur celle-là, les molécules commencent précisément leur deuxième oscillation, tandis que celles de la dernière l'ont achevée. Ce sera analogue pour les enveloppes sphériques dont les surfaces limites ont pour rayons $vt—3\,vd$, $vt—4vd$, etc. Nous pouvons donc nous représenter la transmission de la lumière comme la propagation uniforme des états vibratoires tels qu'ils sont distribués dans ces enveloppes concentriques; de telle sorte que les états vibratoires d'une enveloppe, après la durée d'une oscillation, sont passés aux particules de l'enveloppe contiguë embrassant la première, de façon qu'à la fin de ce temps les molécules de la première enveloppe se retrouvent au même état qu'au commencement. L'analogie entre ce mouvement et celui des ondes aqueuses est évidente. Il y a conformité d'après cela entre le centre de l'onde aqueuse et le point lumineux, entre l'anneau circulaire d'une onde et une des enveloppes sphériques dont nous avons parlé. Aussi d'après cela appelons-nous ces dernières des *ondes lumineuses* : c'est l'ensemble des molécules qui y sont enfermées, considérées dans leurs différents états vibratoires. Nous distinguons aussi dans les ondes lumineuses, comme dans celles produites à la surface d'un liquide, une moitié antérieure et une moitié postérieure. La première renferme les molécules qui sont dans la première moitié de leur vibration, la seconde, celles qui ont fait plus d'une demi-vibration. La distance des deux sphères enveloppes d'une onde lumineuse se nomme *longueur d'onde*. Elle est comme dans les ondes aqueuses, le chemin que le mouvement vibratoire parcourt pendant la durée d'une vibration, et elle est représentée par le produit vd de la vitesse de la lumière par la durée d'une vibration.

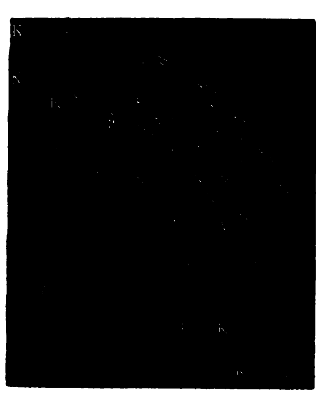
Si le point P cesse de rayonner après le temps T, alors nous aurons outre la limite extérieure du premier mouvement lumineux une limite intérieure de celui qui cesse. Celle-ci, comme la première, sera une sphère dont le centre est P et dont le rayon augmente avec la vitesse v. Après le temps T', plus

grand que T, la partie de l'éther qui se trouvera en mouvement est comprise dans une enveloppe sphérique dont les rayons sont vT' et $v(T' - T)$. Le temps croissant, cette enveloppe s'étend uniformément, mais son épaisseur reste constante.

Nous pouvons encore nous former une idée un peu différente de la précédente du mode de propagation de la lumière. Pour le temps T, soient K_1 et K_2 (fig. 5) les limites extérieure et intérieure d'une onde lumineuse. Chaque

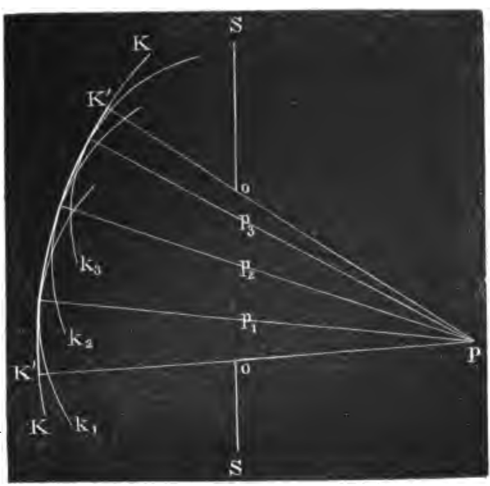


Fig. 5.



point de la masse d'éther entre K_1 et K_2, peut être regardé comme le centre d'un nouvel ébranlement lumineux. Après le temps t, l'état d'un point p_1 de K_1, par exemple, sera transporté aux points d'une sphère k_1 dont le centre est p_1 et le rayon vt. Construisons pour chaque point de K_1 les sphères analogues à k_1 : il est clair qu'après le temps t, l'état de K_1 sera transporté sur la surface qui enveloppe tangentiellement toutes ces sphères. Celles-ci seront enveloppées par deux surfaces sphériques, dont le centre commun est le point P, et dont l'extérieure K'_1 a pour rayon $vT + vt$, et l'intérieure K'' a pour rayon $vT - vt$. Laissons de côté la dernière : quant à la première nous savons par ce qui précède qu'elle est le lieu des points auxquels s'est communiqué l'état de K_1 après le temps t. Cette construction nous fournit pour chaque état vibratoire de l'onde une surface extérieure et une intérieure, dont la première est pour nous le lieu des points dans lesquels s'est transporté l'état vibratoire en question. Et l'ensemble de ces surfaces extérieures est le lieu où l'onde primitive s'est transportée après le temps t. La limite intérieure de la nouvelle onde est la sphère K'_2 qui enveloppe extérieurement les sphères k_2 correspondant aux points p_2 de la surface K_2. Le procédé que nous venons d'indiquer pour transporter une onde à une position plus éloignée, peut aussi s'employer quand même l'onde ne serait pas sphérique. Cette manière d'opérer, qui sert de base dans l'étude de l'optique, se nomme le *Principe d'Huygens*, du nom du savant qui l'a découverte.

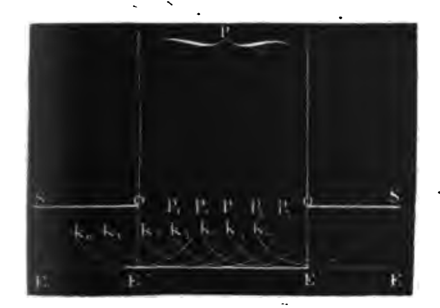
Appliquons cette méthode au cas où le mouvement lumineux est interrompu en partie dans sa propagation. Soit P (fig. 6) un point lumineux, SS un écran opaque qui ne livre passage à la lumière venant du point P que par l'ouverture oo. Chaque état vibratoire émanant du point P par-

vient aux divers points de l'ouverture en général après des temps différents, en p_1 après le temps $\frac{Pp_1}{v}$ en p_2 après le temps $\frac{Pp_2}{v}$. Ces points de l'ouverture seront, pour la propagation de la lumière de l'autre côté de l'écran, comme de nouveaux centres d'onde d'après le principe d'Huygens. Supposons que du moment où p_1 se trouve dans l'état vibratoire indiqué, il se soit écoulé un temps t et que cet état se soit transporté successivement à tous les points de l'ouverture. De p_1 cet état s'est propagé de l'autre côté de l'écran aux points d'une sphère k_1, dont le rayon est vt. Le point p_2 se trouve plus tard que p_1 dans l'état vibratoire en question et d'autant plus tard que la lumière émanée de P arrive plus tard en p_2, c'est-à-dire, du temps $\frac{Pp_2 - Pp_1}{v}$. Du moment où p_2 est dans l'état indiqué jusqu'au temps t, il s'écoule un temps $t - \frac{Pp_2 - Pp_1}{v}$. Par conséquent au bout du temps t, l'état du point p_2 est transporté aux points de la sphère k_2 de rayon $v \left(t - \frac{Pp_2 - Pp_1}{v}\right) = vt + Pp_1 - Pp_2$. De même pour un troisième point p_3, nous aurons la sphère k_3 de rayon $vt + Pp_1 - Pp_3$, etc. Toutes les sphères correspondant aux différents points de l'ouverture, seront évidemment enveloppées tangentiellement par une sphère K identique à celle qui, dans la propagation libre de la lumière, enveloppe extérieurement les particules qui, au bout du temps t, sont dans l'état vibratoire que l'on considère. Mais de la surface K il n'y a de tangent aux sphères k que la portion K' déterminée par la section d'un cône ayant pour sommet le point P et s'appuyant sur le contour de l'ouverture oo. Près des bords de cette portion de la surface sphérique, il y a une autre surface d'un degré supérieur qui touche pareille-

ment les sphères k et est coupée par l'écran ss suivant une courbe parallèle au contour de oo. Toute la portion de cette surface de forme annulaire comprise, au-delà de l'écran, entre celui-ci et le cône dont nous avons parlé plus haut, et la partie de la surface sphérique K comprise de l'autre côté de l'écran en dedans de ce cône, sont le lieu des points qui au bout du temps t sont dans l'état vibratoire en question : ces surfaces dans leur ensemble représentent une surface d'onde. Mais on se convainc facilement par l'expérience que les points seuls de la partie sphérique de la surface de l'onde possèdent un mouvement lumineux appréciable, pourvu seulement que l'ouverture oo n'ait pas de trop petites dimensions, et c'est ce fait qu'on pose en loi dans l'optique élémentaire en disant que *la lumière émanant d'un point lumineux se propage en ligne droite*. D'après cela, le mouvement lumineux de l'autre côté de l'écran consiste dans la propagation uniforme d'ondes sphériques limitées : leur centre est le point brillant P, leur limite reste le cône dont le sommet est P et la directrice le contour de l'ouverture oo, d'où il suit que dans leur propagation les contours des portions d'onde s'étendent d'une manière uniforme. La dioptrique, de son côté, considère la lumière traversant l'ouverture oo comme un faisceau de rayons rectilignes ou traits lumineux divergents à partir du point P, qui remplissent régulièrement le volume du cône K et, partant du point P, s'allongent avec la vitesse propre de la lumière. A ce faisceau de rayons divergents correspondent ainsi dans la théorie des ondulations les ondes sphériques limitées, dont le centre est le point brillant et dont les bords se confondent avec les bords du faisceau ; à chaque rayon de lumière correspond dans la même direction un rayon de l'onde sphérique.

Fig. 7.



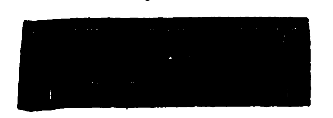
Si le point P (fig. 7) est à une distance telle de l'écran SS, que par rapport à cette distance les dimensions de l'ouverture oo puissent être négligées, alors le faisceau de lumière traversant l'ouverture se transforme en un *faisceau de rayons parallèles*, et les ondes sphériques deviennent des *ondes planes*. Derrière l'écran, elles se propagent avec une vitesse constante, en restant toujours limitées par un cylindre dont la directrice est le contour de l'ouverture oo, et dont la génératrice est parallèle à la ligne qui joint un point quelconque de l'ouverture au point P; le plan de l'onde, dans ce cas, reste constamment perpendiculaire à la direction de la propagation.

Le moyen d'obtenir des rayons parallèles ou des ondes planes est d'une grande importance, parce que c'est à eux que nous rapportons toutes les observations. C'est donc ici le lieu d'indiquer comment on y parvient de la manière la plus simple.

Chaque point d'un corps céleste brillant peut être regardé comme situé à une distance infinie comparativement aux dimensions de nos appareils : dès lors les ondes lumineuses qui nous en arrivent peuvent être regardées comme planes (même en venant de la lune qui est l'astre le plus voisin de nous). Mais quant aux ondes lumineuses qui nous arrivent de différents points d'un corps céleste, nous ne pouvons dans ce cas les regarder comme parallèles qu'autant que la parallaxe de l'astre est suffisamment petite. Pour la lune et le soleil, cet angle a une valeur très-appréciable, si bien que l'inclinaison des ondes planes, nous arrivant de deux points diamétralement opposés du disque de la lune ou du soleil, s'élève à 33′ 31″ et 32′ 35″ à l'époque du périgée. Dans la plupart des recherches d'optique, et en particulier dans celles dont nous nous occuperons dans ce traité, on peut négliger cette divergence. En pénétrant par l'ouverture du volet de la chambre obscure, la lumière du soleil (qu'on emploie surtout dans les expériences à cause de son intensité) peut être regardée comme formant un faisceau de rayons parallèles.

Par une raison analogue, sont aussi parallèles les rayons de la flamme d'une lampe éclatante que l'on éloigne autant que le permet leur intensité. Il est très-facile dans beaucoup de cas d'obtenir des rayons parallèles de la manière suivante : On fait tomber la lumière d'une lampe sur une première lentille l (fig. 8) qui rassemble les rayons incidents en une petite image S de la flamme : on laisse ensuite passer les rayons venant de cette petite image à travers une seconde lentille l', dont le foyer coïncide avec l'image S. Les rayons émergents sont alors parallèles entre eux.

Fig. 8.



Souvent, surtout dans les expériences où l'on n'examine pas l'image formée sur un écran, mais où les rayons pénètrent directement dans l'œil et où la rétine tient lieu d'écran, on peut n'obtenir qu'une divergence très-petite, en laissant passer à travers les deux ouvertures étroites de deux diaphragmes, la lumière réfléchie par les nuées : soient oo et $o'o'$ (fig. 9) les diamètres de

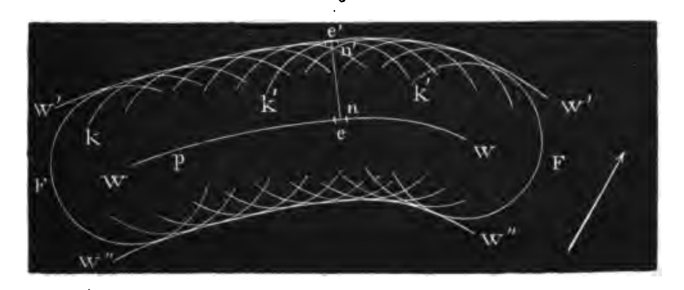
Fig. 9.



deux pareilles ouvertures, l'angle *oCo* mesure la divergence de la lumière qui passe. Si l'œil reçoit directement les rayons, un seul diaphragme suffit, l'iris remplaçant le second.

On peut facilement conclure des considérations précédentes comment on trouve la position nouvelle d'une onde de forme et de limite quelconques. Soit W (fig. 10) une pareille onde à l'époque T. Pour obtenir sa position au

Fig. 10.



temps $T + t$, décrivons pour chacun de ses points les sphères limites k correspondant au temps t. L'espace que remplissent ces sphères est compris entre : 1° la surface W' qui est parallèle à la surface W et en est éloignée, dans la direction de la propagation de l'onde, de la longueur du rayon des sphères k; cette surface touche toutes les sphères; 2° une surface W'' également parallèle à W, qui est aussi à une distance de cette dernière égale au rayon des sphères k, mais dans une direction opposée à celle de la propagation de l'onde; la surface W'' touche aussi toutes les sphères k; 3° une surface F en forme de tore qui ne touche que les sphères ayant pour centres les points du contour de W. Ce n'est que dans la partie de la surface W', touchée par les sphères k, que se trouve dans la nouvelle position de l'onde un mouvement lumineux sensible : cette partie sera déterminée sur W' par la rencontre des normales élevées à l'onde W en chaque point de son contour. En effet soit e un élément plan de la surface W. Il peut être considéré comme appartenant à une onde plane : il se transporte conséquemment dans la direction de sa normale pendant le temps t à une distance égale au rayon d'une des sphères k. Mais la normale nn' est aussi perpendiculaire à la surface W' et joint l'élément e à l'élément e' suivant lequel la surface W' est touchée par la sphère k' correspondant à l'élément e. Après le temps t l'onde plane e tombe sur l'élément e' de la surface W' et toute l'onde W sur la portion de W' limitée par les normales au contour de l'onde primitive. La dioptrique attribue le mouvement dont nous parlons à la multitude

des rayons qui se confondent avec les normales à l'onde W. Un pareil faisceau de rayons qui ne sont ni parallèles ni convergents, ou un ensemble de pareilles ondes ni planes ni sphériques s'obtiendra, par exemple, par la réflexion, sitôt que la surface réfléchissante prendra une forme contournée d'une manière quelconque. De même que l'optique élémentaire ramène la considération de ces rayons à celle de rayons parallèles formant des faisceaux infiniment minces, de même la théorie des ondulations réduit l'étude de ces ondes à celle d'ondes planes infiniment petites. D'après cela dans la suite, au point de vue de la théorie, nous ne considérerons que la manière dont se comportent les ondes planes. L'extension à des ondes d'une autre forme serait, mot pour mot, analogue à ce que l'on fait en dioptrique et en catoptrique.

CHAPITRE III.

Passage de la lumière d'un milieu isotrope dans un autre.

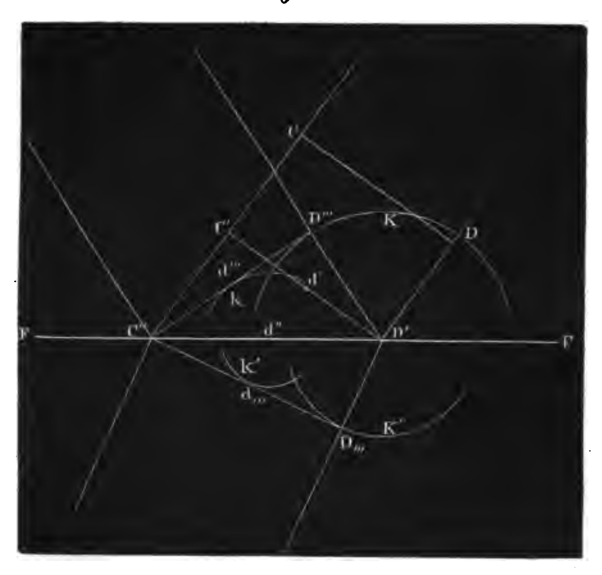
Dans un milieu isotrope, une onde plane se meut sans changer de forme, de direction et d'intensité dans un sens perpendiculaire à son plan et avec une vitesse constante; de telle sorte que chacun de ses points décrit, d'un mouvement uniforme, une ligne droite perpendiculaire au plan de l'onde, et l'enveloppe de l'onde est un cylindre perpendiculaire à son plan. Cette surface cylindrique qui limite dans toutes leurs positions les ondes successives, contient les rayons parallèles auxquels l'optique élémentaire attribue le mouvement lumineux. Nous ne considèrerons pas le rayonnement rétrogradant sur le mouvement primitif. Mais quand une onde plane rencontre sur son chemin la surface d'un second milieu également isotrope, en y pénétrant elle éprouve un changement de direction, de forme et d'intensité; en même temps à partir de la surface du second milieu, il se fait un rayonnement en sens inverse. Le mouvement lumineux primitif en traversant la surface de séparation donne naissance à deux nouveaux mouvements. A partir de la surface de séparation, l'un se propage dans l'intérieur du second milieu, et l'autre dans l'intérieur du premier. La lumière provenant de celui-là est dite *réfractée*, tandis que celle qui revient dans le premier milieu est nommé *réfléchie* : nous dis-

tinguons donc, dans le phénomène en question, une *réflexion* et une *réfraction*. Le faisceau lumineux primitif, par rapport aux nouveaux mouvements qu'il engendre, est appelé *lumière incidente*.

Quelle que soit la forme de l'onde lumineuse incidente, nous pouvons toujours la considérer comme formée d'ondes planes infiniment petites, de même que nous pouvons partager la surface de séparation des deux milieux en éléments plans infiniment petits. Tous les phénomènes de réflexion et de réfraction peuvent dès lors se déduire des lois suivant lesquelles se réfléchit ou se réfracte une onde plane, quand la surface de séparation est elle-même plane, comme on le fait en catoptrique et en dioptrique. La déduction de ces lois des principes de la théorie des ondulations s'offre à nous comme la première des innombrables preuves qui confirment cette théorie.

Soit FF (fig. 11) la projection de la surface plane de séparation de deux

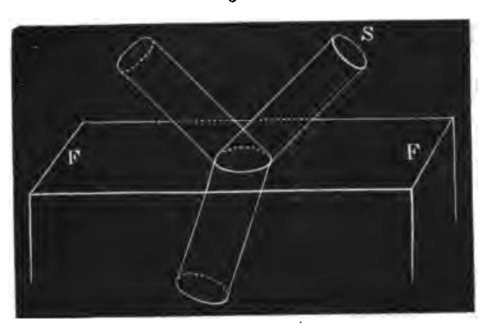
Fig. 11.



milieux isotropes différents, la moitié de la figure au-dessus de FF représentant le premier milieu, la moitié inférieure le second. Le plan de la figure perpendiculaire au plan de l'onde est dit *plan d'incidence*, puisqu'il est mené par la normale au plan réfractant et la normale à l'onde plane incidente ou par la direction des rayons parallèles incidents. Pour préciser les idées, admettons que le faisceau lumineux incident soit un cylindre circulaire S

(fig. 12), dont l'axe est dans le plan de la figure. Celui-ci le coupe suivant deux arrêtes $C''C$ et $D'D$. La projection d'une onde incidente, qui d'après l'hypothèse a une forme circulaire, est une ligne droite comprise entre $C''C$ et $D'D$ et perpendiculaire à ces lignes. Soit CD la projection d'une onde ; celle-ci se propage dans l'intérieur du cylindre S jusqu'à ce qu'enfin elle rencontre la surface de séparation au point D'. Commençons à compter le temps au moment où cela arrive.

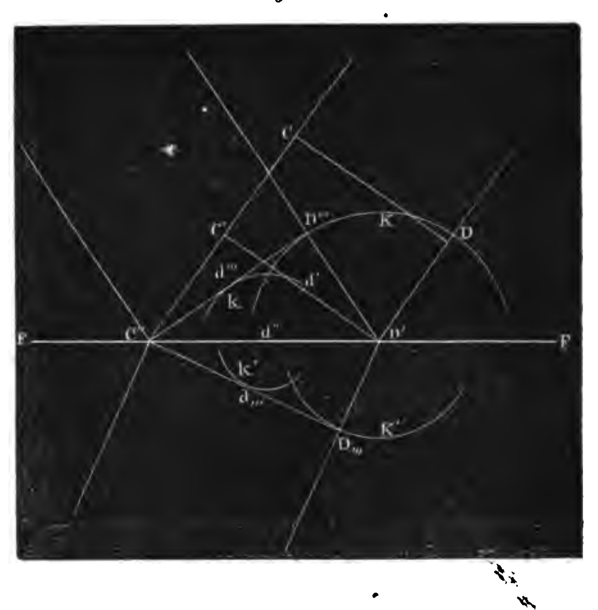
Fig. 12.



Du point D', comme du centre d'un nouvel ébranlement lumineux, s'étendent des ondes sphériques aussi bien dans le premier que dans le second milieu. La même chose arrive pour les autres points de la ligne $C''\,D'$; mais le nouveau mouvement ondulatoire commence d'autant plus tard que le point qui lui sert d'origine est plus près du point C'' : plus un point, en effet, est voisin de C'', plus tard il participe à l'état oscillatoire de l'onde CD. D'après cela nous voyons que quand le point C'' sera enfin dans cet état, celui-ci à partir des points de la ligne $C''\,D'$ se sera propagé dans les deux milieux jusqu'aux surfaces de sphères dont les rayons croissent dans le même rapport que les distances de leurs centres au point C''. En représentant par v la vitesse de la lumière dans le premier milieu, le point d'' se trouve dans l'état de l'onde $C'\,D'$ après le temps $\frac{d'\,d''}{v}$, $d'\,d''$ étant parallèle à CC'', et le point C'' après le temps $\frac{C'\,C''}{v}$. A la fin de ce dernier temps, l'état de l'onde $C'\,D'$ s'est par conséquent propagé du point D' aux points de la surface sphérique K dont le rayon est $v.\ \frac{C'\,C''}{v} = C'\,C''$, du point quelconque d'' à ceux d'une sphère k de rayon $v\left(\frac{C'\,C'' - d'\,d''}{v}\right) = C'\,C'' - d'\,d''$. Et si nous représentons par v' la vitesse de la lumière dans le second milieu, il est évident que dans celui-ci les ondes sphériques correspondant aux points D' et d'' ont pour rayons $v'.\ \frac{C'\,C''}{v}$ et $v'\left(\frac{C'\,C'' - d'\,d''}{v}\right)$.

Menons maintenant, pour étudier la propagation d'abord dans le premier milieu, par le point C'' une tangente $C'' D'''$ à la moitié supérieure du cercle

Fig. 13.



suivant lequel la sphère K est coupée par le plan de la figure, et par cette tangente un plan perpendiculaire à ce dernier; ce plan touche non-seulement la sphère K en D''', mais aussi les sphères k correspondant aux différents points d''. En effet, abaissons de d'' sur $C'' D'''$ une perpendiculaire dont la longueur soit p, on a $p : D' D''' = C'' d'' : C'' D'$. Mais de ce que $d'' d'$ est parallèle à $C'' C'$ on a aussi $C'' d'' : C'' D' = C'' C' - d'' d' : C'' C'$ et partant $p : D' D''' = C'' C' - d'' d' : C'' C'$, d'où il résulte, puisque $D' D''' = C' C''$, que $p = C'' C' - d' d''$. Cette perpendiculaire est donc égale au rayon de la sphère k, et par conséquent le plan mené suivant $C'' D'''$ est tangent à la sphère k du point quelconque d'', et dès lors à celles de tous les autres points de la ligne $C'' D'$. Il est facile de voir aussi que ce plan mené suivant $C'' D'''$ est tangent à toutes les sphères qui correspondent aux points de la surface FF rencontrés par la lumière incidente. En effet, les sphères des points de la portion de la surface FF placés d'un côté et de l'autre du plan d'incidence sur une perpendiculaire menée par d'' sont égales à la sphère k, et sont par conséquent touchées par le même plan. Ce qu'on vient de dire du point d'' peut se répéter pour tout autre point de la ligne $C'' D'$. Le plan

mené par $C^{II}\ D^{III}$ perpendiculairement au plan d'incidence est donc la surface d'onde du mouvement lumineux qui revient dans le premier milieu, c'est-à-dire, de la *lumière réfléchie.* Dans les deux triangles rectangles $C^{I}\ C^{II}\ D^{I}$ et $C^{II}\ D^{I}\ D^{III}$, l'hypothénuse $C^{II}\ D^{I}$ est commune, en outre $C^{II}\ C^{I} = D^{I}\ D^{III}$, donc l'angle $C^{I}\ D^{I}\ C^{II}$ = l'angle $D^{I}\ C^{II}\ D^{III}$ et par conséquent l'onde réfléchie fait avec la surface réfléchissante le même angle que l'onde incidente. La limite de l'onde réfléchie est évidemment sa section par un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires à l'onde et dont la directrice est le contour de la portion de la surface FF frappée par la lumière incidente. Nous arrivons ainsi aux lois suivantes de la réflexion. Au passage des ondes lumineuses d'un milieu isotrope dans un second terminé par une surface plane, une portion de la lumière est réfléchie en ondes planes. *Ces ondes réfléchies sont, ainsi que les ondes incidentes, perpendiculaires au plan d'incidence (c'est-à-dire, au plan mené par une perpendiculaire à la surface de séparation et une normale à l'onde incidente) et font avec la surface de séparation le même angle que les ondes incidentes.* Elles sont limitées par un cylindre dont la directrice est la section de la surface de séparation des deux milieux par le cylindre enveloppant l'onde incidente, et dont la génératrice est perpendiculaire à la surface de l'onde réfléchie. L'identité de ces lois avec celles que la catoptrique donne comme résultats de l'expérience, est évidente.

Ces considérations sur la lumière réfléchie s'appliquent, sans y rien ajouter, à la lumière réfractée : nous n'avons qu'à prendre les sphères K^{I} et k^{I} au lieu des sphères K et k, la tangente $C^{II}\ D_{III}$ au lieu de $C^{II}\ D^{III}$. Un plan mené par cette ligne $C^{II}\ D_{III}$ normalement au plan d'incidence sera la surface de l'onde réfractée. Elle sera limitée par le cylindre ayant pour directrice le contour de la portion de la surface FF rencontrée par le cylindre lumineux incident et dont la génératrice est perpendiculaire à $C^{II}\ D_{III}$. Les angles que l'onde incidente et l'onde réfractée font avec le plan réfractant où, ce qui est la même chose, les angles que les normales à chaque onde font avec la normale à la surface FF, angles qu'on nomme *angle d'incidence* et *angle de réfraction,* représentons-les par i et r; alors

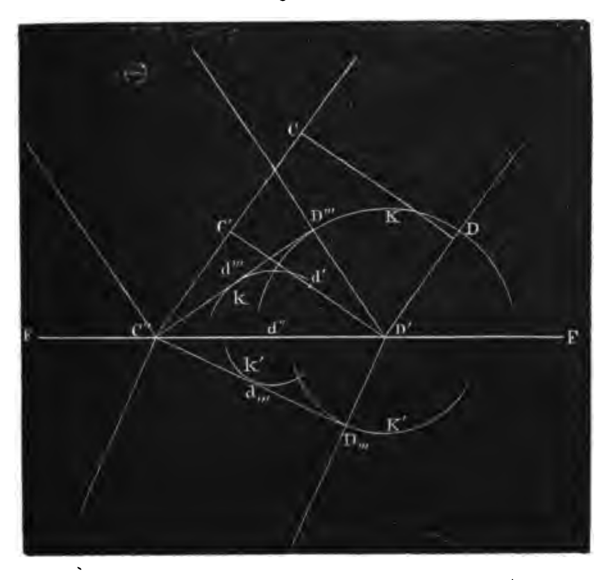
$$D^{I}\ D^{III} = D^{I}\ C^{II}.\ \text{Sin.}\ i \text{ et } D^{I}\ D_{III} = D^{I}\ C^{II}.\ \text{Sin.}\ r, \text{ d'où :}$$

$$\frac{\text{Sin.}\ i}{\text{Sin.}\ r} = \frac{D^{I}\ D^{III}}{D^{I}\ D_{III}}$$

ou bien, puisque les rayons des sphères K et K^{I} sont entre eux comme les vitesses v et v^{I} de la lumière dans les deux milieux :

$$\frac{\text{Sin.}\ i}{\text{Sin.}\ r} = \frac{v}{v^{I}}$$

Fig. 14.



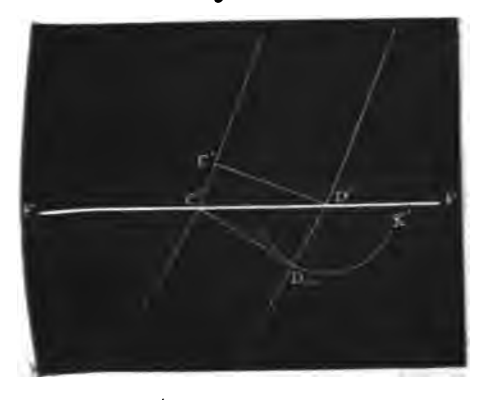
Le rapport $\frac{v}{v'}$ reste constant pour les deux mêmes milieux et la même espèce de lumière, et ainsi nous arrivons par la voie de la théorie des ondulations aux lois de la réfraction découvertes par Snellius et développées par Descartes, savoir, que *pour les mêmes milieux et la même lumière le rapport entre le sinus de l'angle d'incidence et le sinus de l'angle de réfraction a une valeur constante.* Ce rapport se nomme *indice de réfraction relatif* des deux milieux. Ce nombre, d'après la théorie des ondulations, est le quotient des vitesses de la lumière dans les deux milieux, et par une démonstration directe, M. Foucault a fait triompher cette théorie comme nous l'avons exposé plus haut, au moins pour le cas où la lumière pénètre de l'air dans l'eau.

La loi de Descartes a trouvé dernièrement une confirmation superflue par les expériences de M. Dutirou, qui s'étendent jusqu'à une incidence de 89° 35'.

Si, comme dans le cas examiné plus haut, la lumière pénètre dans un milieu auquel correspond la plus petite vitesse, le cylindre de lumière est réfracté vers la normale à la surface, et l'indice de réfraction est plus grand que l'unité; alors le second milieu est dit *plus réfringent* et le premier

moins réfringent. Dans la marche inverse d'un milieu plus dense dans un milieu moins dense, en général le cylindre de lumière se réfracte en s'écartant de la normale, et l'indice de réfraction est moindre que l'unité, comme on le voit par la fig. 15, qui n'est pour ce cas qu'une répétition de la figure 14. On reconnaît facilement que l'indice de réfraction relatif de deux milieux A et B, pour le passage de A en B, est égal à la valeur réciproque de ce même rapport pour la réfraction de B en A.

Fig. 15.



Les phénomènes de la réfraction astronomique nous apprennent que l'air atmosphérique est plus réfringent que le vide, et de ce phénomène Delambre a conclu pour leur indice de réfraction relatif la valeur 1,000294. Parmi les substances de notre globe, les gaz comparés aux liquides et aux solides, sont les corps les moins réfringents.

L'indice de réfraction, quand la lumière vient du vide dans un autre milieu, est appelé *indice de réfraction absolu* de ce dernier.

L'indice de réfraction relatif du milieu B, par rapport à A, est égal au quotient de l'indice de réfraction absolu du premier milieu divisé par celui du second. Soient v, v', v'' les vitesses d'une certaine espèce de lumière dans le vide, dans le milieu A et le milieu B. Soient q' et q'' les indices absolus des derniers, on a $q' = \frac{v}{v'}$, $q'' = \frac{v}{v''}$ d'où l'on tire

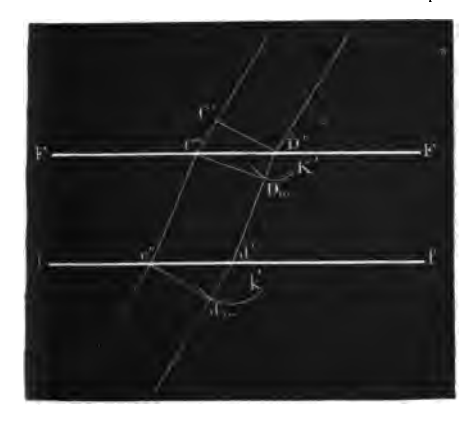
$$\frac{q''}{q'} = \frac{v'}{v''}$$

mais $\frac{v'}{v''}$ est l'indice de réfraction relatif au passage de la lumière de A dans B.

Si le milieu réfringent est terminé par un second plan parallèle au premier, le rayon réfracté subit à la seconde surface une nouvelle réfraction en pénétrant de nouveau dans le premier milieu. D'après cela, il reprend sa direction primitive comme on peut le voir par la figure 16; seulement il en est plus ou moins écarté dans le plan d'incidence. Mais si la seconde surface li-

mite est inclinée sur la première, le rayon deux fois réfracté sort en général du premier plan d'incidence. Il n'y reste que lorsque la seconde surface est perpendiculaire au plan d'incidence, et il prend alors dans celui-ci une direction différente de la première. La fig. 17 représente ce cas. La dioptrique nous apprend que la déviation du rayon deux fois réfracté a sa valeur minimum, quand le rayon réfracté pour la première fois est également incliné sur les deux faces du milieu réfringent prismatique. Représentons par α l'angle que font entre elles les deux faces du prisme (angle qu'on nomme *angle réfringent* du prisme), soit i le minimum de déviation, et n l'indice de réfraction, pour le passage de la lumière du milieu environnant le prisme dans celui-ci, on a :

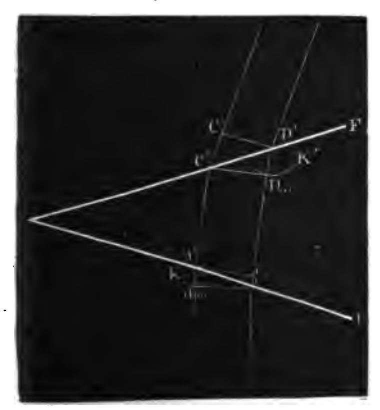
Fig. 16.



$$n = \frac{Sin. \frac{\alpha + i}{2}}{Sin. \frac{\alpha}{2}}$$

D'après cela la valeur de n se déduit de celles de α et de i, et c'est dans la mesure de ces grandeurs que consiste la seule méthode exacte d'évaluer l'indice de réfraction d'une substance transparente (voir plus loin page 34). Descartes mesurait l'indice de réfraction du verre par la déviation d'un rayon de lumière tombant normalement sur une face de son prisme en verre (voir sa *Dioptrique*, chap. X). Pour pouvoir mesurer par ce procédé l'indice des gaz et celui des liquides, il faut leur donner la forme prismatique, et pour cela les enfermer dans un vase dont deux faces opposées et inclinées l'une sur l'autre doivent être formées par des lames de glace à faces parfaitement parallèles : celles-ci ne doivent dès lors faire éprouver aucune déviation au rayon incident, si l'on

Fig. 17.



a soin de donner aux faces de ces lames un parallélisme parfait. Si cette dernière condition n'était pas remplie, on corrigerait les erreurs qui en résultent par le moyen indiqué dans le *Précis élémentaire de physique expérimentale de Biot*, 1842, t. 2, p. 113.

Pour déterminer les indices de réfraction des différentes substances, il est plus naturel de les mesurer par rapport à l'air, et de conclure ensuite leur indice absolu de l'indice absolu de l'air. Il était donc important de mesurer avant tout celui-ci, et cela autant que possible par un procédé physique. C'est ce qu'ont fait, les premiers, MM. Arago et Biot (1), par une méthode tout à fait satisfaisante. En déterminant l'indice de réfraction de la lumière, passant de l'air atmosphérique dans une masse d'air prismatique de moindre densité, et ensuite de densités différentes, ils sont arrivés aux résultats suivants : 1° La réfrangibilité de l'air croît de la même manière pour toutes les couleurs avec sa densité dans le sens ordinaire du mot, et est indépendante de la température et de la pression. L'air est donc plus réfringent que le vide, et l'est également pour toutes les couleurs : son indice de réfraction absolu est plus grand que l'unité et a la même valeur pour chaque espèce de lumière. Les accroissements de l'indice absolu de l'air sont proportionnels aux accroissements de sa densité. 2° L'indice absolu de l'air correspondant à sa densité à la température 0° et à la pression 760^{mm}, a pour valeur 1,000294 ; nombre qui s'accorde parfaitement avec celui que Delambre a déduit de la réfraction astronomique.

Les deux savants dont nous parlons ont étendu leurs recherches à d'autres gaz, et pour ceux-ci ils sont arrivés aux lois marquées sous le n° 1. Pour un mélange de gaz, ils ont trouvé que l'indice observé s'accorde avec celui qu'on obtient en concluant l'excès de l'indice du mélange sur l'unité des excès analogues des indices des éléments, d'après la loi des règles de mélanges. Représentons donc par N l'indice d'un mélange dont les éléments entrent pour des masses m', m'', m'''.... et soient n', n'', n'''.... les indices de ces éléments, on aura :

$$N - 1 = \frac{m'(n' - 1) + m''(n'' - 1) + \ldots}{m' + m'' + \ldots}$$

D'après Dulong (2), qui a continué les recherches sur l'indice de réfraction des gaz, cette dernière loi cesse d'avoir lieu quand dans leur mélange ils agissent chimiquement l'un sur l'autre. Les lois du n° 1 sont en général

(1) Gilb. Ann., t. 25 et 26.
(2) Ann. de Pogg. VI.

d'autant plus applicables que les gaz sont plus éloignés de leur point de condensation. Dans le voisinage de ce dernier, l'excès de l'indice sur l'unité croît dans un rapport plus grand que la densité. *La vitesse de la lumière dans les fluides gazeux est donc indépendante de la couleur, et moindre que dans le vide ; elle décroît dans un même gaz quand la densité augmente, et tant que le corps ne s'approche pas de l'état liquide, les diminutions de la vitesse restent proportionnelles aux accroissements de la densité.* Les indices de réfraction des gaz étant peu différents de l'unité, leurs excès sur l'unité sont sensiblement proportionnels à la différence de leurs carrés avec l'unité. S'appuyant sur des considérations théoriques, MM. Biot et Arago exprimèrent les résultats de leurs recherches, en disant que ces dernières différences, qu'on nomme puissances réfractives, étaient proportionnelles à la densité. La différence entre cette interprétation et celle que nous avons adoptée, se trouve dans les limites des erreurs de l'expérience ; les deux explications ont ainsi la même valeur. Voy. au reste Dulong, *loc. cit.*

Les résultats des recherches de MM. Arago et Biot, savoir la puissance réfractive et la densité des gaz soumis à l'expérience, sont consignés dans le tableau I du supplément. La table II contient les indices absolus et les puissances réfractives déterminés par Dulong. Ces deux tables se rapportent à la température 0° et à la pression 760^{mm}. Les nombres de Dulong méritent plus de confiance que ceux d'Arago et Biot, parce que le premier a fait ses recherches à une époque (1826) où la chimie avait appris à préparer les gaz avec une plus grande pureté. C'est plutôt à cette circonstance, qu'à l'inexactitude des observations que Dulong croit devoir attribuer la différence entre ses résultats et ceux d'Arago et de Biot.

Dans les liquides et les solides, au contraire de ce qui arrive pour les gaz et pour le vide, les lumières différemment colorées ne se propagent pas avec la même vitesse ; car, à leur passage de l'air dans de pareils corps, elles sont inégalement réfractées suivant la couleur. Le degré de réfrangibilité est donc étroitement lié à la qualité de la lumière que nous percevons par l'organe de la vue, et nous trouvons constamment qu'un changement dans la qualité est accompagné d'un changement analogue dans la réfrangibilité. Cette considération et cette circonstance que la lumière d'une réfrangibilité donnée pour deux milieux déterminés, conserve le même indice pour ces mêmes milieux de quelque manière au reste qu'on la modifie, sont des motifs suffisants pour nous faire regarder la réfrangibilité comme inhérente à la qualité ; dans notre théorie cette dernière étant attribuée à la durée des oscillations, nous sommes ainsi obligés d'admettre que la vitesse de la lumière dans les corps liquides et

dans les corps solides est une fonction de la durée de la vibration ou de la longueur d'onde, tandis qu'elle en est indépendante dans le vide et dans les gaz.

Le phénomène de la *dispersion*, découvert et étudié par Newton, résulte de ce qu'aux différentes espèces de lumière homogène correspond une réfrangibilité différente. Par dispersion on entend la décomposition par réfraction d'une lumière quelconque en parties non ultérieurement décomposables. Celles-ci se nomment élémentaires ou homogènes; elles sont colorées et ont toujours, quelle que soit la source de la lumière décomposée, une des sept couleurs : — violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge ou une nuance comprise entre deux de ces couleurs consécutives. Étudions plus à fond cette décomposition pour la lumière solaire.

A travers une ouverture verticale, étroite *ss* (fig. 18), on laisse arriver

Fig. 18.



des rayons parallèles du soleil sur un prisme également vertical *P* que l'on a taillé dans un corps solide en polissant deux faces planes qui se coupent, ou que l'on a formé avec un liquide en l'enfermant entre deux lames de verre à faces parallèles inclinées l'une sur l'autre. A leur entrée dans le prisme les rayons du soleil seront divisés, dispersés, c'est-à-dire, leurs parties élémentaires colorées seront amenées à diverger, parce qu'elles sont inégalement réfractées. Le mouvement lumineux, rencontrant le prisme, résulte en effet de tous les mouvements homogènes, dont la durée des vibrations correspond aux différentes couleurs réunies dans la lumière solaire. D'après cela nous regardons l'onde plane incidente comme résultant de la superposition d'ondes de lumière homogène. À leur entrée dans le milieu prismatique, celles-ci sont écartées

différemment de leur direction primitive : mais toutes restent perpendiculaires au plan d'incidence ; le cylindre lumineux incident se subdivise en faisceaux de rayons homogènes et parallèles. Les cylindres qui limitent ces faisceaux ont pour directrice commune la courbe suivant laquelle le cylindre incident coupe la face du prisme. Mais les axes de ces cylindres, qui sont tous dans le plan d'incidence, sont différemment inclinés sur la normale : ils divergent.

Les rayons de couleur violette sont toujours les plus écartés de leur direction primitive, puis de moins en moins et successivement, les bleus, les verts, les jaunes, les orangés et enfin les rouges qui le sont le moins de tous. Et c'est ce qui arrive encore quand bien même la lumière incidente ne viendrait pas du soleil, mais par exemple d'une lampe. La divergence des rayons colorés persiste encore à la sortie par la seconde face du prisme. Si la lumière incidente consiste seulement en rayons homogènes, comme les rayons violets d'une réfrangibilité déterminée, ceux-ci ne perdent pas leur parallélisme après la réfraction répétée deux fois, et forment sur un écran SS une image de l'ouverture ayant la même hauteur et la même largeur. Si les rayons incidents pénètrent dans le prisme sous un angle tel qu'après la première réfraction ils fassent le même angle avec les faces du prisme, alors le cylindre émergent aura la même section que le cylindre incident, si bien que si SS est perpendiculaire à $s' s''$, les dimensions de l'image $s'' s''$ seront les mêmes que celles de la fente ss. Si la lumière incidente renferme des rayons d'une réfrangibilité un peu moindre que celle des précédents, elle formera sur l'écran une seconde image $s''' s'''$ provenant de ces rayons, présentant du reste les mêmes particularités que la première, et d'autant plus éloignée de celle-ci que la distance de l'écran au prisme sera plus grande. Mais dans le fait il y a dans la lumière du soleil, parmi les autres rayons, un grand nombre de rayons violets dont les qualités, il est vrai, ne varient pas de l'un à l'autre d'une manière tout à fait continue (car sans cela leur nombre serait illimité), mais par des changements brusques peu sensibles. Il résulte de là que la partie violette de la lumière incidente sera étalée sur l'écran en une bande horizontale Vv également violette ayant la même hauteur, la même dimension verticale que la fente. Cette bande consiste en images de l'ouverture se superposant en partie et successivement. L'extrémité V est formée par les rayons les plus réfrangibles, puis la réfrangibilité diminue en allant vers v où se trouve l'image due aux rayons les moins réfrangibles. Plus l'écran est voisin du prisme, plus est petite la dimension horizontale de l'image, et plus les différentes images se rapprochent les unes des autres en se superposant. Si nous éloignons l'écran, elles s'éloignent : à une certaine distance deux

images consécutives, pour lesquelles le changement de qualité de l'une à l'autre est très-grand, pourront être écartées l'une de l'autre, et leur dis-

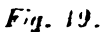
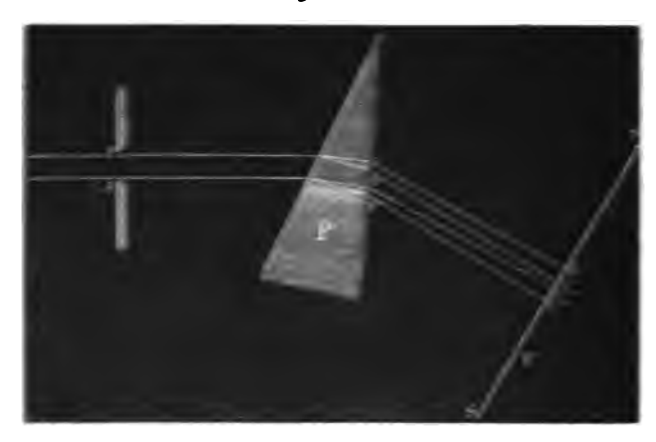


Fig. 19.



tance augmentera à mesure que l'écran s'éloignera du prisme. Dès lors dans l'image violette sur l'écran doit apparaître une raie verticale obscure qui sépare ces deux images, et dont la dimension horizontale augmente avec l'éloignement de l'écran. A côté de cette première raie obscure, on en aura d'autres si l'on augmente l'éloignement de l'écran ou si on diminue la largeur de la fente, et, d'après cela, une raie devra présenter une largeur d'autant plus grande qu'elle apparaît plus tôt pendant qu'on éloigne l'écran ou qu'on rétréeit l'ouverture du volet.

Ce que nous venons de dire relativement aux apparences que présenteraient les parties élémentaires violettes de la lumière du soleil, s'applique en général à tous les rayons élémentaires de cette lumière. Nous classons ceux-ci dans les sept degrés de coloration suivants : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge. Comme les rayons violets, les autres s'étalent aussi en bandes horizontales, et leur ensemble forme la bande unique du spectre, observée pour la première fois par Newton. L'œil n'y peut distinguer aucune limite tranchée entre les différentes couleurs pas plus qu'on n'en peut reconnaître par la réfrangibilité. Celle-ci augmente d'un bout du spectre à l'autre par saccades nombreuses, irrégulièrement distribuées et inégalement grandes. Les changements les plus marqués sont indiqués, d'après ce que nous venons de dire sur la formation du spectre, par de fines raies obscures qui doivent résulter, comme on l'a montré, d'un accroissement ou d'une diminution non continue de réfrangibilité.

Les raies obscures du spectre furent observées pour la première fois par le physicien anglais Wollaston, et décrites dans les *Transactions philosophiques* de 1802; mais plus tard elles furent étudiées d'une manière complète par l'opticien allemand Frauenhofer qui ignorait le travail de Wollaston. On leur donna, d'après le savant allemand, le nom de raies de Frauenhofer. Leur découverte eut pour l'étude de la lumière des conséquences fort importantes. Voici comment Frauenhofer les observe : à travers une fente verticale, et dans la chambre obscure on fait arriver un rayon du soleil sur un prisme vertical en flint-glass (1), solidement fixé à une lunette horizontale. La lunette est très-éloignée de la fente et disposée de manière que, lorsque sans le prisme elle est dirigée vers l'ouverture, on aperçoit nettement celle-ci. A cause du champ limité de la lunette, une partie seulement des rayons élémentaires sortant de la seconde face du prisme est réfractée au foyer principal de l'objectif pour former l'image de la fente, et ces rayons s'y réunissent tous pour faire une partie du spectre comme sur l'écran employé plus haut. Par l'oculaire, nous regardons cette image partielle comme un objet à travers une loupe, et *nous la voyons grossie*. Si nous tournons la lunette dans le plan horizontal, l'inclinaison de la lumière incidente sur la première face du prisme change, et il pénètre dans la lunette une autre partie de la lumière sortant de la seconde face : au foyer se forme donc l'image d'une autre partie du spectre. Nous pouvons de cette manière faire arriver successivement au foyer toutes les parties du spectre, et les examiner au moyen de l'oculaire. Si la fente est suffisamment étroite et si la lunette grossit convenablement, nous apercevrons dans le spectre un grand nombre de raies verticales obscures, disséminées dans toutes les couleurs et ne présentant pas plus de loi dans leur répartition que dans leur largeur toujours fort petite : ce sont là les raies de Frauenhofer. Leur nombre et leur largeur augmentent avec le grossissement de la lunette et à mesure que l'ouverture du volet devient plus étroite. Mais dans ce dernier cas, l'intensité du spectre observé diminue d'une manière sensible.

Frauenhofer choisit parmi les raies des différentes couleurs, celles qui se distinguent le mieux et peuvent être dès lors facilement retrouvées; il les désigna en allant du rouge au violet par les lettres $A, B \ldots H$ (fig. 20). Dans la partie rouge du spectre, on remarque la raie unique et large A, la paire B dont la raie tournée vers A est très-fine, enfin la raie unique C à la limite

(1) Cette sorte de verre a un pouvoir dispersif considérable qu'il doit au plomb entrant dans sa composition.

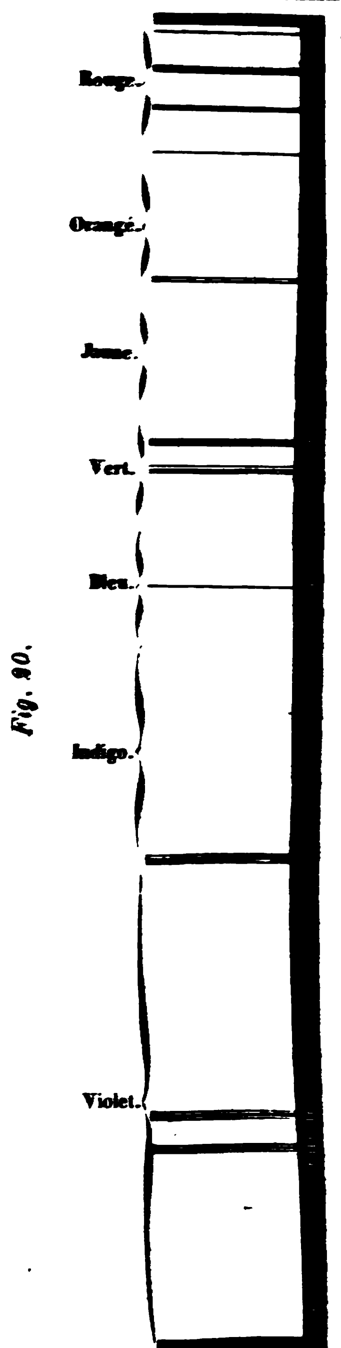


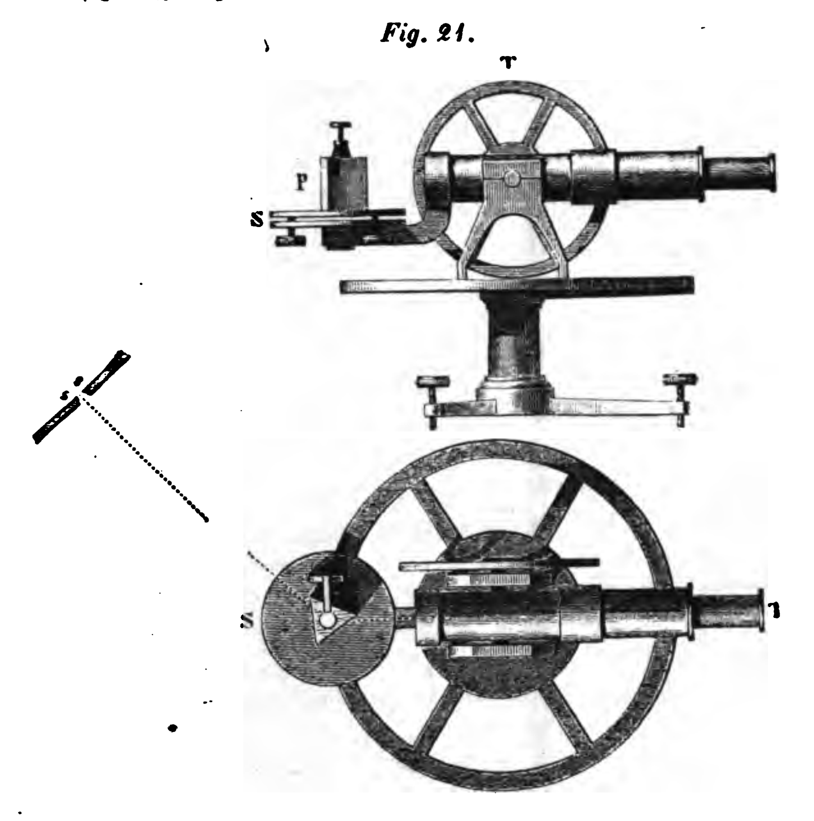
Fig. 20.

de l'orangé. *D* consiste en deux lignes également obscures et se trouve dans l'orangé près du jaune. *E* est un groupe de plusieurs raies très-rapprochées dans le vert. La raie épaisse *F* est au milieu du bleu, le groupe *G* entre l'indigo et le violet, et enfin le groupe *H* dans le violet à l'extrémité du spectre. C'est dans la partie située entre le jaune et l'orangé que l'éclat est maximum; à partir de là il diminue graduellement de chaque côté pour s'éteindre vers chaque extrémité.

Le grand avantage des raies de Frauenhofer, c'est qu'elles indiquent dans le spectre des positions déterminées, et dès lors servent de point de repère dans la recherche des indices de réfraction. Pour fixer la réfrangibilité d'une substance, nous devons déterminer exactement ces indices, et les données doivent être nettes pour qu'on puisse facilement retrouver la même qualité de lumière. Le nom de lumière verte ou jaune, n'indique rien de précis, car il y a de la lumière verte ou jaune de différentes réfrangibilités. Au contraire, la qualité est parfaitement fixée si nous disons que l'on parle de rayons qui, dans la série des éléments de la lumière solaire, sont voisins de telle ou telle raie *A*, *B*.... Puis pour obtenir des données positives sur l'indice de réfraction d'un milieu quelconque, nous cherchons l'indice de ce milieu par rapport à l'air pour la lumière correspondant aux raies *A*, *B*.... Frauenhofer consigna cet usage des raies du spectre dans le volume V des *Mémoires de l'Académie de Munich* 1814 et 1815, et détermina lui-même l'indice de réfraction d'une série de substances pour les raies *B*, *C*.... Le procédé expérimental qu'il employa, consiste essentiellement en ce qui suit : un théodolithe *T*,

devant l'objectif duquel est placé un disque S mobile autour d'un axe vertical (fig. 21), est placé horizontalement à une distance suffisamment grande

Fig. 21.



d'une fente *ss* verticale, et disposé de manière que le point de croisement des fils du micromètre de la lunette coïncide avec le milieu de l'image de la fente; pour cette position on note l'azimuth a. Puis on fixe sur le disque S un prisme p formé de la substance soumise à l'expérience, de manière que son arête réfringente soit verticale. Par un mouvement de rotation de la lunette, on amène une des raies A.... H du spectre, produit par la lumière tombant à travers *ss* sur p, au milieu du champ de l'instrument, c'est-à-dire, au point de croisement des fils. Alors au moyen du disque S, on tourne plusieurs fois et fort peu chaque fois le prisme p autour de son axe vertical, et à chaque mouvement ramenant la même raie au centre du champ de la lunette, et notant l'azimuth de celle-ci, on trouve bientôt la position du prisme qui correspond au plus petit azimuth : soit a' ce dernier. Pour la lumière

relative à cette raie, $a' - a$ sera par conséquent le minimum de la déviation produite par le prisme p. Représentons par α l'angle réfringent du prisme mesuré par les procédés goniométriques, et par n l'indice de réfraction de la lumière en question, ou pour être plus court de la raie observée, alors on aura la relation connue qui permet de calculer n au moyen des nombres observés,

$$n \,.\, \sin.\, \tfrac{1}{2}\, \alpha = \sin.\, \tfrac{1}{2}\, (\alpha + a' - a).$$

Une description complète de toutes les particularités que présente la recherche des indices de réfractions se trouve développée dans le *Mémoire sur la détermination des indices de réfraction des sept raies de Frauenhofer dans une série nombreuse de verres. Par M. l'abbé Dutirou. Ann. de Ch. et Phy., 3e série, tome 28.*

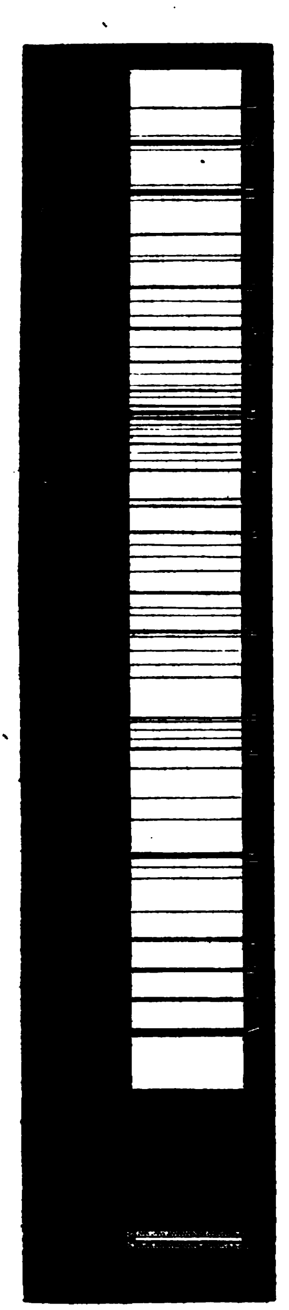
Pour avoir une représentation graphique des raies du spectre qui pourrait être utile, on porte, comme Frauenhofer l'a fait le premier, sur une ligne droite à partir d'une extrémité des longueurs proportionnelles aux azimuths minima des raies, et on élève à chaque point de division des perpendiculaires d'égale longueur, qui représentent chaque raie en particulier. On cherche ensuite à donner autant que possible à chaque perpendiculaire une épaisseur proportionnelle à celle de la raie qu'elle représente. C'est de cette manière que Frauenhofer a dessiné le spectre dans le Ve volume des *Mémoires de l'Académie de Munich*, pour 1814 et 1815 (1).

La fig. 22 représente le spectre avec ses plus fortes raies, comme l'a observé le savant anglais Baden-Powell (2) : l'échelle qui est à côté permet d'apprécier l'écartement des différentes parties et des raies. Powell employait, pour obtenir ce spectre, une lunette achromatique grossissant environ 10 fois et qui, avec le prisme, était à peu près à 12 pieds de l'ouverture par laquelle pénétraient les rayons du soleil. La largeur de la fente était de $\frac{1}{20}$ de pouce. Powell fait la remarque qu'en employant un grossissement même de 20 fois, il ne fut pas en état de reconnaître que les deux larges raies, formant la raie *G* de Frauenhofer, étaient un groupe de raies très-fines ainsi que les représente la figure de Frauenhofer.

Les raies de Frauenhofer étant causées par le manque de lumière solaire,

(1) On trouvera les travaux remarquables de cet illustre opticien, ayant rapport à la dispersion, dans le mémoire intitulé : Détermination du pouvoir réfringent et dispersif de différentes espèces de verre, etc., par Jos. Frauenhofer, imprimé dans les mémoires astronomiques de Schumacher, pour 1823.

(2) Ann. de Pogg., LXIX.



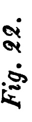


Fig. 22.

dans certaines espèces de lumière leur nombre ne pourra pas diminuer si on fait passer cette lumière à travers un milieu quelconque, mais il est au contraire permis de penser que ce nombre augmenterait, si par exemple quelques-unes des parties élémentaires de la lumière solaire étaient détruites par ce passage. Et en effet, le savant opticien anglais Brewster (1) découvrit que, outre les raies de Frauhenhofer, on en remarque de nouvelles, si, avant de traverser le prisme ou après s'être étalée en spectre, la lumière solaire est dirigée à travers un tube fermé aux deux bouts par des lames de glace, à faces parallèles, et rempli d'acide hypoazotique. C'est dans les portions bleue et violette du spectre qu'on remarque le plus de nouvelles raies et les plus larges.

Augmente-t-on la longueur de la colonne gazeuse traversée, ou élève-t-on sa température, ce qui fouce la nuance orangée du gaz, on voit un plus grand nombre de raies, et leur netteté augmente avec leur largeur.

L'acide hypoazotique n'est pas le seul gaz qui présente cette propriété. Daniell et Miller, deux physiciens anglais, l'ont retrouvée aussi dans d'autres gaz colorés. Pour plus de détails, voir les *Annales de Poggendorf*, XXXII, XXXVIII et LXIX.

Les corps liquides et les corps solides se comportent autrement que les gaz. Qu'ils soient colorés ou incolores, ils ne déterminent aucune nouvelle raie dans le spectre. Si l'on place sur la route d'un

(1) Ann. de Pogg., XXVIII, XXXIII, XXXVIII.

rayon lumineux une colonne d'un liquide coloré ou bien une lame d'un corps solide coloré, cela ne produit dans le spectre provenant de ce rayon aucune raie différente de celles de Frauenhofer, seulement cela détermine en une ou plusieurs places du spectre un affaiblissement d'intensité. Les portions du spectre dont les couleurs sont principalement absorbées par le corps traversé ont moins d'éclat que les autres et disparaissent même complétement si le corps est suffisamment épais ou sa couleur suffisamment foncée. Le physicien suédois Rudberg qui a étudié avec soin la manière dont se comportent un grand nombre de liquides est arrivé à ce résultat (1), « que les raies noires conservent leur position dans chaque couleur du spectre jusqu'à la disparition de celle-ci, et qu'en outre aucune nouvelle raie ne se présente. » Miller a trouvé que tandis que le gaz acide chloreux déterminait de nouvelles raies, sa dissolution aqueuse bien que colorée n'en offrait pas.

La composition de la lumière émise par un corps dépend nécessairement de la manière dont elle se produit et de la nature du corps lumineux. D'après cela, dans des spectres produits au moyen d'un seul et même prisme, mais par des lumières venant de diverses sources, nous voyons toujours une différence dans le nombre, la distribution et la largeur des raies ou des bandes obscures, comme on peut souvent les appeler à cause de leur étendue. Consultez à ce sujet : Moigno, *Répertoire d'optique moderne*, t. II et III. — *Annales de phy. et chim.*, mars 1851. *Études de photométrie électrique*, par Masson.— *Annales de Poggendorf*, XVI, XXXI, XXXIII, XXXVI, XXXVIII.

La dispersion de la lumière nous offre le meilleur moyen de nous procurer de la lumière homogène. On fait tomber le spectre sur un écran dans lequel on a pratiqué une petite ouverture en rapport avec la longueur du spectre. Par cette ouverture passent seulement des rayons qui diffèrent très-peu par leur réfrangibilité. En déplaçant l'écran ou en tournant le prisme, de nouveaux rayons élémentaires de la lumière incidente traversent l'ouverture; plus celle-ci est petite, et plus la lumière obtenue de cette manière s'approche de l'homogénéité. On trouve dans le travail de M. Dutirou, cité plus haut : *Mém. sur la détermination des ind. de réfr., etc.*, un appareil fondé sur ce principe, l'illuminateur, au moyen duquel on peut facilement obtenir un faisceau de rayons parallèles d'une réfrangibilité déterminée. L'appareil fut imaginé par M. Babinet et réalisé par M. Dutirou.

On utilise aussi assez fréquemment l'absorbtion pour se procurer une lumière simple au moins jusqu'à un certain degré. Les milieux colorés laissent

(1) Ann. de Pogg., XXXV.

passer de préférence, sans l'affaiblir, la lumière dont ils paraissent colorés, et celle-ci prédomine par conséquent dans les rayons qui les traversent. Ainsi, par exemple, les verres colorés par le peroxyde de cuivre donnent de la lumière verte, par le protoxyde de la lumière rouge. L'antimoniate de potasse et l'oxyde de fer colorent le verre en jaune, seulement un peu plus orangé avec le dernier. Le bleu s'obtient par l'oxyde de cobalt, le violet par l'oxyde de manganèse. Mais la lumière traversant un verre coloré n'est jamais homogène : la plus pure est celle qui vient d'un verre fortement coloré en rouge par le protoxyde de cuivre. Comme le protoxyde de cuivre se transforme facilement en bioxyde à une haute température, et que déjà en petite épaisseur il colore très-fortement, on procède comme il suit pour obtenir du verre rouge. Avec la canne du souffleur on prend très-peu de verre coloré par l'oxydule de cuivre et facilement coulant, ensuite on prend une plus grande quantité de verre incolore moins coulant. La masse attachée à l'extrémité de la canne est alors soufflée et transformée en lame. Cette feuille est formée de verre incolore recouvert d'une couche mince de verre rouge plus facilement fusible. Plus cette couche est épaisse, plus la couleur de la lumière est pure, mais en même temps plus elle perd de son intensité.

Parmi les liquides colorés, une dissolution de sulfate de cuivre ammoniacal est ce qu'il y a de mieux pour obtenir une lumière sensiblement homogène et presque violette.

Dans l'emploi des milieux colorés, il revient évidemment au même ou de colorer par leur moyen la lumière incidente, ou bien de la laisser parvenir à l'œil à travers la lame colorée aussitôt après qu'elle a éprouvé les changements nécessités par l'expérience. Car, dans un cas comme dans l'autre, l'action des rayons absorbés par le milieu est annulée dans l'expérience.

Brewster préfère, pour obtenir un rayon d'une réfraction déterminée, l'oxalate double de chrome et de potasse, corps hétérotrope (1). Ce sel a la propriété, sous une certaine épaisseur encore assez faible, d'éteindre toutes les parties du spectre, à l'exception d'une bande mince qui se trouve dans le rouge. Dans le spectre obtenu par Brewster, la zone lumineuse persistante était éloignée de la raie B (fig. 20) de la sixième partie de l'intervalle, entre B et A, et du côté de cette dernière. Dès lors si un faisceau de rayons solaires tombe sur une lame de ce sel d'une épaisseur convenable et facile à trouver, il ne passe que les rayons dont la réfrangibilité correspond à la partie du spectre que nous venons d'indiquer.

(1) Ann. de Pogg., XXXVII. Sur les propriétés optiques de l'oxalate double de chrome et de potasse, par Brewster.

Enfin c'est aussi le lieu de remarquer que parmi les différentes sources de lumière, la flamme de l'alcool salé donne une lumière jaune à peu près homogène.

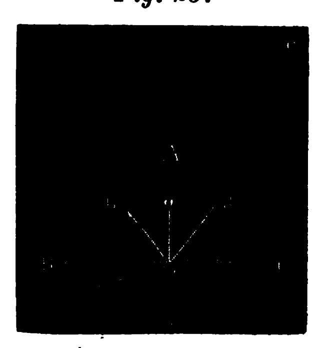
Dans les dernières tables de l'appendice, nous donnons les résultats des recherches faites jusqu'à présent sur les indices de réfractions par rapport à l'air pour les liquides et les solides isotropes. Le troisième tableau contient les mesures de Frauenhofer qui eurent une influence si marquée sur le développement de l'optique théorique. Dans le quatrième tableau se trouvent les résultats des observations du physicien anglais Baden-Powell (1). Parmi ces observations on en rencontre quelques-unes relatives au même corps à différentes températures : on y voit que celle-ci augmentant, et par conséquent la densité diminuant, l'indice devient plus petit. Cela s'accorde bien avec la loi d'Arago et Biot, sur la proportionnalité de la puissance réfractive et de la densité des gaz, et aussi avec ce fait que l'indice de réfraction augmente par le passage d'un corps de l'état gazeux à l'état liquide, et de celui-ci à l'état solide (voy. tableau II et dans le sixième : acide sulfureux, sulfure de carbone, etc.). Dans le cinquième tableau sont réunis les indices des différents verres mesurés par M. Dutirou (2). Dans ces trois tableaux, les indices des substances sur lesquelles on a expérimenté, sont déterminés par rapport aux raies principales *B*, *C*.... de Frauenhofer : ils ont été mesurés par la méthode de Frauenhofer développée plus haut page 34. (Le procédé de M. Dutirou ne s'écarte pas dans ce qui est essentiel de celui de Frauenhofer.) Dans le sixième et dernier tableau nous ne trouvons plus que les valeurs moyennes des indices des milieux isotropes, c'est-à-dire, les valeurs de chaque rapport pour les rayons de réfrangibilité moyenne, pour les rayons jaunes. La lumière jaune est aussi celle dont l'intensité domine au milieu des parties élémentaires colorées de la lumière solaire, en sorte que dans beaucoup de cas la connaissance de cette valeur moyenne suffit. Tous les nombres de ce tableau n'ont pas été déduits de la déviation produite par la réfraction à travers un prisme, surtout, on le comprend facilement, quand il s'agissait d'un corps opaque. Quant à ce qu'il faut entendre par indice de réfraction d'une substance opaque, et quant à sa détermination, voyez page 43. Les éléments de la sixième table sont tirés de la liste donnée dans le 2e volume de l'optique d'Herschel : mais cette liste, comme on peut le voir en comparant, fut considérablement augmentée par les déterminations de M. Jamin (3).

(1) Ann. de Pogg., LXIX.
(2) Ann. de chim. et de phys., 3e série, t. 28.
(3) Ann. de phys. et de chim., 3e série, t. 29 et 31.

En déduisant les lois de la réfraction des principes de la théorie des ondulations, nous avons examiné le cas où la lumière passe d'un milieu moins réfringent dans un milieu plus réfringent. Nous avons vu qu'à l'onde incidente en correspondent toujours une réfléchie et une réfractée. Si la lumière tombe normalement sur la surface de séparation, le faisceau réfracté est le prolongement du faisceau incident, et cela quel que soit l'indice de la substance. Si l'angle d'incidence augmente, celui de réfraction augmente aussi, mais en restant toujours moindre que le premier, et en même temps les rayons réfractés ayant des indices différents, s'écartent de plus en plus les uns des autres. Enfin dans le cas où les rayons incidents *rasent la surface*, c'est-à-dire, quand l'angle d'incidence est droit, la dispersion et l'angle de réfraction r atteignent leur valeur la plus grande, laquelle, pour ce dernier, est donnée par l'équation $Sin.\ r = \frac{1}{n}$, n étant l'indice relatif des deux milieux.

Mais les résultats sont différents si le premier milieu est le plus réfringent. La construction reposant sur le principe d'Huyghens donne toujours dans ce cas un rayon réfléchi, mais il n'y a de rayon réfracté qu'autant que l'angle d'incidence ne dépasse pas la limite J pour laquelle on a $Sin.\ J = \frac{1}{n}$. Pour cette limite même, la figure de l'onde réfractée se réduit à une ligne droite. Celle-ci est en C'' (fig. 11) perpendiculaire au plan d'incidence et est limitée par les deux tangentes à l'intersection du cylindre incident et de la surface de séparation, menées parallèlement au plan d'incidence. Si l'angle d'incidence dépasse cette limite, il n'y a aucun plan, ni aucune surface qui touche toutes les ondes sphériques du second milieu. Les mouvements élémentaires ne se composent plus alors pour former une onde perceptible : il n'y a aucun rayon réfracté, et cela arrive pour toutes les valeurs de l'angle d'incidence comprises entre cette limite et un angle droit. On sait d'après l'étude élémentaire de la lumière, qu'on nomme *réflexion totale* cette réflexion de la lumière pour une incidence comprise entre ces limites : ce nom lui vient de ce que l'intensité de la lumière réfléchie ne diffère pas d'une manière sensible de celle de la lumière incidente ; toutefois on peut encore reconnaître un affaiblissement appréciable de cette dernière. Wollaston a montré que l'on peut fa-

Fig. 23.



cilement déduire l'indice de réfraction relatif de deux milieux de l'observation de l'angle limite J de la réflexion totale, et il a imaginé et construit un instrument au moyen duquel on mesure cet angle. Le principe sur lequel il repose peut s'expliquer ici brièvement. Soit ABC (fig. 23) un prisme isocèle en verre dont l'indice de réfraction est n. Il ne pourra sortir de celui-ci, dans la direction de, que les rayons qui, dans le prisme, ont suivi la route cd telle que l'on ait : $Cos.\ edA = n.\ Cos.\ cdC$. Les rayons parallèles à cd ont éprouvé sur la face BC ou une réflexion ou une réfraction. Mais dans la direction cd il n'y a de réfléchi, par BC, que les rayons qui tombent suivant bc quand $bco = ocd$; et les rayons réfractés suivant cd proviennent de ceux qui, dans l'air, parallèles à $a'\ c$, arrivent sur BC, de manière que $Sin.\ a'\ co' = n.\ Sin.\ ocd$. Enfin les rayons qui dans le prisme se propagent suivant bc, proviennent, s'ils sont produits par réfraction, de rayons qui dans l'air, parallèles à ab, remplissent la condition $Cos.\ abA = n.\ Cos.\ Bbc$. Mais si les rayons bc doivent leur origine à une réflexion sur AB, ils ont alors déjà subi pour le moins une réfraction et un affaiblissement, et, avant d'arriver dans la direction de, par réflexion sur BC et réfraction en AC, ils auront d'autant moins d'éclat, qu'ils ont déjà perdu presque toute leur intensité par le fait des changements de direction qu'ils ont subis. Aussi en regardant vers le prisme, dans la direction ed, on ne recevra presque que la lumière qui tombe sur le prisme dans les directions ab et $a'c$: on verra donc à travers le prisme les objets placés dans la direction ca', et en même temps, et recouvrant ceux-ci, les images des objets qui se trouvent dans la direction ba. Si l'on regarde sur le prisme suivant une autre direction faisant avec oc un plus grand angle que ed, les angles ocd, ocb, $o'\ ca'$ croissent ainsi que l'angle de ab avec co. Enfin ocd atteint l'angle limite J, et dans ce cas ca' se confond avec BC. L'œil ne voit aucun des objets placés sous BC, et en même temps les images vues par réflexion des objets placés dans la direction ba acquièrent leur plus grand éclat, parce que les rayons bc éprouvent sur BC la réflexion totale. Si par exemple c'est la lumière des nues qui tombe suivant ab, elle donne à la base du prisme l'éclat de l'argent. Cette apparence aurait encore lieu, quand même l'angle entre de et co deviendrait plus grand. On voit facilement, d'après ce qui précède, comment on peut ob-

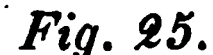
Fig. 23.

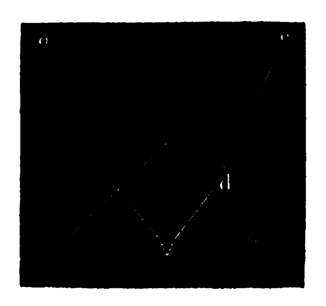


server le commencement de la réflexion totale, et mesurer l'angle limite J correspondant.

Mettons une partie de la face BC du prisme en contact immédiat avec un corps transparent, fluide ou demi-fluide, dont l'indice de réfraction n' soit plus petit que celui du verre. L'angle limite J' de la réflexion totale, pour le passage de la lumière du verre dans ce corps, est donné par l'égalité $Sin.\ J' = \frac{n'}{n}$, qui montre que J' est plus grand que J. Ainsi, tandis que la lumière est déjà totalement réfléchie sur tous les autres points de la base BC, elle n'éprouve qu'une réflexion partielle partout où le verre est en contact avec la substance; cette place se dessine d'une manière tranchée sur l'éclat argentin de la base. Mais si l'on tourne le prisme de manière que la direction suivant laquelle on observe fasse un angle toujours plus grand avec co, on arrivera bientôt à une position pour laquelle la place de contact du verre et du corps disparaîtra et deviendra brillante. De l'angle, que dans cette position la direction du rayon visuel fait avec la normale oc et de l'indice de réfraction connu n du verre, on déduit facilement l'angle limite J', le rapport $\frac{n'}{n}$, et enfin l'indice de réfraction absolu de la substance.

Si le corps soumis à l'expérience est solide et facilement fusible, on le place en fusion sur le prisme et on l'y laisse refroidir. Si ce n'est pas possible, ou si le corps présente un indice de réfraction plus grand que celui du verre du prisme, on le colle au prisme par une face plane polie, au moyen d'une couche mince d'un mastic transparent (baume ou résine). L'indice de ce mastic doit être plus grand que ceux du corps et du prisme. On le mesurera préalablement, et dès lors il sera facile de déterminer l'angle limite de la réflexion totale pour le passage du mastic dans le corps, au moyen de l'observation de l'angle formé par de et co (fig. 24). La fig. 25 montre comment dans ce cas la lumière tombant suivant ab est réfractée et réfléchie.


Fig. 25.



Si l'on applique à des corps opaques la méthode précédente, ils présentent les mêmes phénomènes que les corps transparents. Nous pouvons donc logiquement, d'après cela, parler de l'*indice de réfraction des corps opaques*, et nous hésitons d'autant moins, que pour un grand nombre de corps, nous reconnaissons leur opacité seulement à partir

d'une certaine épaisseur et au-delà ; et par conséquent, guidés par l'analogie, nous attribuons à tous les corps un certain degré de transparence, mais non une opacité complète.

Dans le sixième tableau, nous trouvons inscrits les indices de réfraction de substances opaques (dans le sens ordinaire du mot), qui furent mesurés par Wollaston au moyen du procédé indiqué plus haut.

Le léger affaiblissement de la lumière par la réflexion totale, la disparition du rayon réfracté nous décèlent un rapport particulier entre l'intensité des rayons incident, réfracté et réfléchi. Ce n'est pas, il est vrai, le moment de nous occuper ici de cette relation, mais nous ne devons cependant pas écarter une difficulté à laquelle nous conduit la construction analysée page 21. Celle-ci, en effet, nous donne encore un rayon réfléchi quand le second milieu est identique au premier. La chose se passe cependant alors comme si la lumière se propageait dans un seul et même corps : or, dans ce cas, on ne voit jamais de rayon réfléchi, et c'est pourquoi, dans l'application du principe d'Huyghens à la propagation de la lumière dans un milieu isotrope (page 15), nous ne tenons pas compte des ondes intérieures fournies par la construction. L'intensité du rayon réfléchi et celle du rayon réfracté dépendent évidemment (des expériences fort simples suffisent pour le montrer), non-seulement de l'angle d'incidence, mais encore de l'indice relatif des deux milieux. La question que nous venons de soulever, sera décidée si nous démontrons que c'est une conséquence nécessaire des principes de la théorie des ondulations que, si l'indice relatif est égal à l'unité, l'intensité du rayon réfracté est égale à celle du rayon incident, et qu'alors celle du rayon réfléchi devient nulle. Cette démonstration est possible, mais seulement il faut plus de moyens que nous n'en avons jusqu'à présent à notre disposition ; c'est pourquoi, contentons-nous ici d'avoir indiqué la possibilité de résoudre la question, et, dans ce qui suit, montrons l'accord parfait entre les résultats de la théorie et les données de l'expérience qui doivent la compléter.

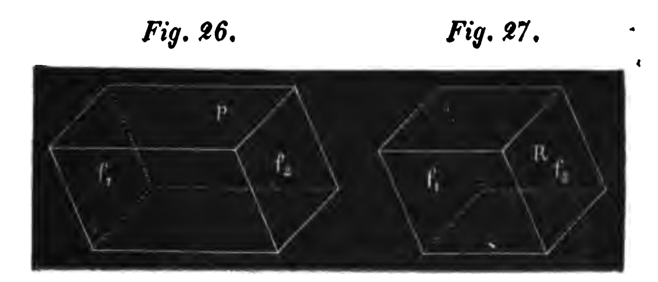
CHAPITRE IV.

Nature des vibrations lumineuses dans un milieu isotrope.

Nous venons d'étudier la propagation des ondulations lumineuses sans avoir rien supposé sur leur nature, nous allons maintenant nous occuper du mode de vibration de l'éther. Pour chaque vibration on doit surtout se demander : 1° quelle est la forme de la trajectoire que parcourt la masse oscillante; 2° quelles sont les dimensions de cette trajectoire; 3° quel est le temps pendant lequel elle est décrite, ou quelle est la durée de la vibration? Et d'abord, quant à la forme de la trajectoire, nous allons chercher quelques données dans le phénomène très-simple de la double réfraction. Nous trouverons là des éclaircissements, non-seulement sur le caractère général des vibrations lumineuses, mais encore sur la forme de la trajectoire pour une espèce déterminée de lumière, et il sera facile d'en déduire les trajectoires pour les autres espèces.

Parmi les nombreuses variétés de carbonate de chaux il en est une, le spath d'Islande, que la nature nous offre sous forme de cristaux parallélépipédiques, transparents au plus haut degré (fig. 26). Les faces de ce cristal

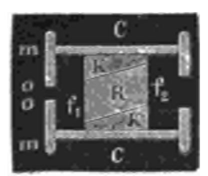
Fig. 26. *Fig. 27.*



sont des parallélogrammes dont les angles sont de 101° 55' et 78° 5', elles se présentent comme les plans de plus facile clivage, c'est-à-dire que parallèlement à ces faces, le spath d'Islande peut être facilement divisé, et les faces nouvelles ainsi obtenues sont parfaitement planes et éclatantes. En utilisant cette propriété, on peut retirer sans peine d'une masse naturelle de

spath, un parallélépipède dont les faces sont des losanges ou rhombes avec les angles indiqués plus haut (fig. 27); un pareil parallélépipède se nomme un *rhomboèdre*. On fixe un rhomboèdre de spath R (fig. 28), au moyen d'un morceau de liége K, dans une enveloppe métallique C de forme cylindrique, de manière que deux faces opposées soient perpendiculaires à l'axe de l'enveloppe. Celle-ci porte à une extrémité la plaque en laiton mm percée en son milieu d'une petite ouverture circulaire oo. Pour une épaisseur du rhomboèdre de 20^{mm}, le diamètre de l'ouverture sera de 2^{mm} ou moins : pour une plus grande épaisseur on pourra augmenter oo dans le même rapport.

Fig. 28.

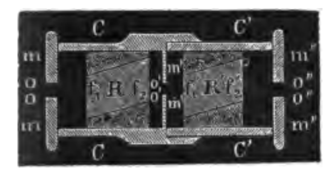


En dirigeant sur mm des rayons lumineux parallèles d'une couleur quelconque, dans la direction de l'axe du cylindre, il arrive sur le cristal R un faisceau de rayons parallèles dont la section est égale à l'ouverture oo. Si nous recevons la lumière sortant du cristal sur un écran SS (fig. 29), placé perpendiculairement à l'axe de l'instrument, nous apercevons sur SS deux images également éclairées de la couleur de la lumière incidente, et ayant la même grandeur que l'ouverture. L'une a son centre à la rencontre a' de l'axe et de l'écran; elle est formée par un cylindre lumineux qui est le prolongement en ligne droite du faisceau incident. La seconde image a son centre à côté de a', sur la ligne droite suivant laquelle l'écran est coupé par un plan mené par l'axe aa, et parallèle à la petite diagonale des faces latérales f_1 et f_2; et la seconde image conserve cette position par rapport au cristal, quand même on tourne le tuyau autour de son axe. Pendant ce mouvement, la première image ne change pas, mais la seconde se meut autour de la première dans le même sens et avec la même vitesse que le tube, en même temps qu'elle conserve le même éclat, la même position par rapport à la première image et à la ligne droite dont nous avons parlé : le centre a'' décrit un cercle autour de a'. La seconde image est donc formée par un cylindre lumineux, parallèle à celui de la première, par conséquent au faisceau incident et identique à celui-là en forme et en grandeur, mais dont l'axe est éloigné de l'axe du premier d'une certaine quantité (qui dépend de l'épaisseur du cristal), dans un plan parallèle à la petite diagonale des rhombes f_1 et f_2 et perpendiculaire à ces faces. Ce plan s'appelle *section principale* du cristal. De ce qui précède, nous concluons que l'onde plane

Fig. 29.

incidente à son entrée dans le cristal se partage en deux groupes d'ondes planes, pour chacun desquels pendant la propagation dans l'intérieur du cristal il y a des lois particulières. Pour l'un d'eux ces lois sont les mêmes que pour les milieux isotropes, et, d'après cela, nous appelons les ondes de ce groupe, *ondes réfractées ordinaires*, tandis que les autres nous les disons réfractées *extraordinairement*. Plaçons devant la face f_2 (fig. 30) un diaphragme $m' m'$ dont l'ouverture $o' o'$ est égale à l'ouverture oo, et ayant comme celle-ci son centre sur l'axe du tuyau, alors il ne sortira du cylindre que les rayons ordinaires. Laissons-les tomber sur un second rhomboèdre R' de spath d'Islande de la même épaisseur que le premier et fixé, comme lui, dans un tuyau $C' C'$. Celui-ci entre, à frottement doux, dans le premier CC, et peut tourner autour de leur axe commun. La lumière sortant de f'_2 donne maintenant, en général, deux images de l'ouverture oo, ayant les mêmes rapports de forme et de position, que celles formées en sortant du premier cristal par les rayons ordinaires et les rayons extraordinaires. Mais le rapport d'intensité des deux nouvelles images diffère de celui des premières : occupons-nous seulement de l'intensité de celle des deux images produite dans le second cristal par les rayons ordinairement réfractés, et, à cet effet, pratiquons dans la lame métallique $m'' m''$ une ouverture $o'' o''$ ayant la même position et la même grandeur que oo et $o' o'$, et par conséquent ne laissant passer que ces rayons. Plaçons d'abord le cylindre $C' C'$ dans une position telle, par rapport au premier, que les sections principales des deux cristaux soient parallèles (de telle sorte, par conséquent, que les petites diagonales des rhombes f_1, f_2 et f'_1, f'_2 soient parallèles); on verra sur l'écran une image de l'ouverture qui le cède à peine en éclat à l'image ordinaire obtenue par le premier cristal.

Fig. 30.



Mais si, à partir de la position indiquée, on tourne le second tube dans un sens ou dans l'autre, l'éclat de l'image diminue au fur et à mesure que l'angle dont on tourne augmente, jusqu'à ce qu'enfin cet angle devienne droit, et par conséquent jusqu'à ce que les sections principales des cristaux soient perpendiculaires; alors l'éclat est le plus faible possible, il est nul, l'image de l'ouverture disparaît complétement. Elle reparaît de nouveau, si l'on tourne davantage; elle devient plus brillante et reprend sa première intensité *maximum* quand on a tourné de deux angles droits, quand par conséquent les sections principales des deux cristaux se confondent de nouveau.

Les apparences que nous venons de décrire se répètent, si en partant de cette dernière position on tourne au-delà des deux angles droits, jusqu'à ce qu'on ait ramené le cristal dans sa position primitive : la même chose a lieu dans quelque sens que l'on tourne. De ces faits nous concluons que la modification, que subit dans son intensité par son passage dans le second cristal le cylindre lumineux sortant du premier, dépend de la position que prend la section principale du second cristal, par rapport à un certain plan important à considérer dans ce cylindre lumineux : si nous choisissons pour ce plan, celui mené par l'axe du cylindre et parallèlement à la section principale du premier cristal, le faisceau lumineux perd d'autant plus en intensité, que l'angle formé par ce plan invariable et la section principale du second cristal se rapproche plus de l'angle droit : la lumière est à peine affaiblie quand cet angle est nul, et elle est presque complétement éteinte quand cet angle est droit. Le cylindre lumineux se comporte en outre, par rapport à ce plan fixe, de la même manière que par rapport à un autre perpendiculaire au premier; car le faisceau lumineux éprouve la même modification aussitôt que la section principale du second cristal fait le même angle avec l'un de ces plans, la section principale pouvant se trouver d'un côté ou de l'autre du plan. Dès lors, le plan fixe de la section principale se distingue essentiellement du plan qui lui est mené perpendiculairement, par l'axe du faisceau lumineux. Tout cela nous conduit à attribuer à ce dernier des *côtés*, ou, comme on dit, une *polarisation ; nous devons y distinguer une droite, une gauche, un haut et un bas*. Seulement pour avoir une notation déterminée, nous admettrons que la direction des côtés du rayon est marquée par le plan de la section principale, que nous nommons pour cette raison *plan de polarisation* du faisceau lumineux, ou des ondes, ou des rayons qui le produisent. Nous aurions pu, pour les mêmes raisons, donner ce nom au second plan de symétrie du rayon.

Fig. 31.



A ce fait remarquable qu'on peut attribuer des côtés à la lumière, se rattachent des conséquences importantes sur la nature des vibrations lumineuses. En effet, quelle que soit la nature des vibrations d'une molécule d'éther qui se trouve sur le trajet de la lumière, nous pouvons toujours, d'après les premiers principes de la dynamique, les regarder comme résultant de l'action simultanée de trois vibrations linéaires, dans la direction de trois axes perpendiculaires entre eux, le choix de ces axes étant toutefois indéterminé.

Plaçons en un dans la direction du faisceau lumineux ou des rayons parallèles, et par conséquent perpendiculaire au plan de l'onde. La vibration d'une molécule lumineuse sera dès lors pour nous, en général, la résultante d'une vibration dans la direction de la propagation, perpendiculaire au plan de l'onde et qu'on nomme *longitudinale*, et de deux vibrations perpendiculaires à la direction de la propagation et dans le plan de l'onde, qu'on nomme pour cela *transversales*, et qui sont perpendiculaires entre elles. Il peut maintenant se présenter trois cas : les vibrations peuvent être seulement *transversales*, ou seulement *longitudinales*, ou, ce qui est le cas le plus général, elles peuvent résulter de ces deux espèces de vibrations. Il est impossible de déduire la propriété d'avoir des côtés dans la lumière polarisée des seules vibrations longitudinales, mais bien des vibrations transversales. Dès lors nous devons supposer l'existence des dernières dans la lumière polarisée. Quant aux vibrations longitudinales qui pourraient les accompagner, nous pouvons admettre qu'elles sont anéanties par leur passage à travers le spath calcaire ; dès lors, la lumière polarisée consiste seulement en vibrations transversales. Mais, en second lieu, on pourrait aussi supposer qu'elles sortent du spath modifiées d'une certaine façon. Dans la lumière polarisée par le premier cristal de l'expérience rapportée plus haut, se trouveraient dès lors des vibrations longitudinales, et elles devraient se propager aussi à travers le second spath calcaire modifiées d'une façon quelconque, mais toujours la même quelle que soit la position du dernier cristal. Or, quand les deux sections principales sont à angles droits, il ne sort du second cristal aucun mouvement lumineux appréciable. Donc, si les vibrations longitudinales existent, nous ne sommes plus en état de les percevoir. Quelle que soit des deux hypothèses précédentes celle que nous dussions accepter, dans tous les cas nous nous voyons contraints *d'attribuer à des vibrations transversales la lumière polarisée tant qu'elle est sensible.* Et ce qui paraît le plus naturel, c'est d'essayer d'expliquer tous les phénomènes lumineux par les *vibrations transversales.* La suite nous montrera que cela réussit d'une manière tout à fait satisfaisante, et nous y voyons une raison d'adopter cette hypothèse.

D'après les principes de dynamique invoqués plus haut, nous pouvons toujours regarder les vibrations transversales de la lumière polarisée par le premier cristal, comme résultant de deux vibrations rectilignes dont l'une est dans le plan de polarisation et l'autre lui est perpendiculaire. Mais de ce que cette lumière est seulement un peu affaiblie quand la section principale du second cristal coïncide avec le plan de polarisation, tandis qu'au contraire elle est tout à fait éteinte quand ces plans sont perpendiculaires, nous devons

conclure que l'on ne peut admettre l'existence que de l'une ou de l'autre de ces deux composantes. Si elles existaient en effet toutes deux en même temps, il serait bien certain que la lumière en question aurait deux côtés latéraux dans les deux directions indiquées, mais on ne pourrait pas comprendre comment, selon la position du second cristal, tantôt la lumière passerait à peine affaiblie, tantôt elle serait tout à fait éteinte. Ce qui reste indécis, c'est la direction de ces vibrations que nous devons seules admettre, sont-elles dans le plan de polarisation ou perpendiculaires à ce plan. La théorie ne donne aucune réponse incontestable relativement à cette question, et aucun des phénomènes lumineux connus ne permet de porter un jugement à ce sujet. Nous admettons, avec le même droit qu'on pourrait alléguer en faveur du contraire, que les vibrations du faisceau lumineux polarisé sont perpendiculaires à son plan de polarisation, et alors nous nommons le plan qui leur est parallèle, c'est-à-dire, le plan mené par la direction du faisceau et perpendiculairement au plan de polarisation, le *plan de vibration* ou *d'oscillation* du rayon ou des ondes planes correspondantes.

De ce que le plan de polarisation de la lumière polarisée par double réfraction est un plan de symétrie, par rapport auquel le rayon se comporte tout à fait comme s'il avait une droite et une gauche, il faut aussi que les vibrations rectilignes d'un côté et de l'autre de ce plan aient lieu identiquement de la même manière, c'est-à-dire que, dans un pareil rayon, chaque molécule d'éther s'éloigne d'un côté du plan de sa position d'équilibre jusqu'à une certaine distance *maximum*, puis revienne de nouveau à sa position d'équilibre, pour exécuter de l'autre côté du plan un mouvement tout à fait pareil. Un rayon de lumière de la nature de ceux qui sont polarisés par double réfraction, nous le nommons *polarisé rectilignement*, parce que nous l'attribuons à des vibrations rectilignes parallèles.

Si la partie perceptible de toutes les espèces de lumières consiste en vibrations transversales, ce qui pour nous est vraisemblable, ces vibrations, d'après la dynamique, peuvent être regardées comme les résultantes de deux lumières à vibrations rectilignes, car chaque vibration unique, quelle que soit son origine, peut être décomposée en deux vibrations rectilignes, parallèles à deux axes déterminés perpendiculaires au rayon. Mais la nature des composantes rectilignes pourrait fort bien différer de la nature des vibrations de la lumière polarisée par double réfraction; ces composantes, par exemple, n'auraient pas besoin d'être symétriques, par rapport à un plan fixe passant par le rayon. Quant à la lumière ordinaire non polarisée, comme celle émanant du soleil ou d'un corps lumineux par lui-même, on peut facilement prouver,

même avec les moyens de démonstrations que nous avons déjà à notre disposition, qu'elle se compose de lumière polarisée rectilignement ou mieux qu'elle ne diffère en rien de la lumière provenant du concours de deux ondes ou de deux faisceaux polarisés rectilignement.

Nous nous en convaincrons par l'expérience suivante : Faisons avec le faisceau que nous avons désigné comme extraordinairement réfracté, les mêmes expériences qu'avec le faisceau ordinaire, nous trouverons bientôt qu'il est aussi polarisé rectilignement, mais que son plan de polarisation est perpendiculaire à celui du rayon ordinaire. La direction du faisceau extraordinaire dans le cristal reste évidemment indépendante de la grandeur de l'ouverture *oo* (fig. 28 et 29) ; par conséquent, l'écartement des axes des deux faisceaux à leur sortie du premier cristal conserve la même grandeur. L'élargissement graduel de l'ouverture *oo* (fig. 28), fait seulement que les contours des faisceaux et des images se rapprochent d'abord, puis se touchent, puis enfin se coupent. Quand ce dernier cas arrive, on distingue dans l'ensemble des faisceaux et des images trois parties. Deux sont formées l'une par les rayons ordinaires, l'autre par les rayons extraordinaires : ce sont dans les images les deux parties *o* et *e* (fig. 32), juxta-posées en forme de croissant. Ces deux parties ont la même intensité. Enfin, dans la troisième partie moyenne, la lumière ordinaire se mêle à la lumière extraordinaire; sur l'écran c'est la partie *c*, suivant laquelle les deux images se crouvrent; cette partie emprunte son éclat aux rayons ordinaires et extraordinaires, et présente, d'après cela, une intensité plus grande que chaque partie *o* et *e*. Si nous analysons maintenant la partie centrale de la lumière qui provient de la superposition des ondes ordinaires et extraordinaires, nous verrons qu'elle se comporte comme de la lumière ordinaire, non polarisée, quelle que soit d'ailleurs la qualité de la lumière primitivement employée. La lumière ordinaire non polarisée, se comporte donc absolument de la même manière que la lumière résultant de la superposition des ondes ordinaires et extraordinaires, polarisées mutuellement à angle droit, également intenses, et en lesquelles un cristal de spath calcaire partage une onde de lumière ordinaire. A la place d'une onde de lumière ordinaire, nous pouvons donc dorénavant supposer toujours deux ondes égales arrivant simultanément, de même intensité, polarisées rectilignement et à angle droit. Nous pouvons choisir d'une manière tout à fait arbitraire la position absolue de l'une des directions de polarisation; car, de ce que le faisceau neutre de l'expérience précédente ne présente aucun côté particulier, ses propriétés ne changent pas,

Fig. 32.



de quelque manière que nous tournions, par rapport à un plan fixe absolu dans le faisceau, la section principale du cristal, et en même temps la direcrection de polarisation des rayons composants. Nous voyons, d'après cela, que nous pourrons déduire les propriétés de la lumière ordinaire de celles de la lumière polarisée rectilignement; et comme l'étude des vibrations de l'éther dans cette dernière est plus simple, nous allons tout d'abord en faire l'objet de nos recherches.

Parmi les attributs du mouvement de la lumière polarisée en ligne droite, nous n'avons pas encore examiné les dimensions de la trajectoire et la durée de l'oscillation. La forme de la trajectoire étant une ligne droite, d'une certaine direction, nous n'avons à nous occuper que d'une seule dimension, à savoir : la longueur de la ligne droite que la molécule d'éther décrit dans son mouvement de va et vient. Cette vibration consiste en ce que la molécule d'éther s'écarte de sa position d'équilibre d'un côté de son plan de polarisation, dans la direction de la vibration, s'éloigne de cette position jusqu'à un maximum, revient à sa position d'équilibre par le même chemin, pour repasser ensuite de la même manière de l'autre côté du plan de polarisation, atteindre un nouveau maximum égal au premier, et revenir enfin à sa position d'équilibre pour recommencer la vibration suivante. La grandeur de chaque maximum se nomme l'*amplitude de l'oscillation;* le double est la longueur de la trajectoire.

Nous ferons dépendre l'intensité de la lumière de l'amplitude des oscillations; et ce qui paraît le plus simple à admettre, c'est qu'une amplitude constante correspond à un faisceau d'intensité constante. Mais cette supposition n'est pas nécessaire. En effet, nous n'avons conscience d'une impression lumineuse qu'autant qu'elle a agi sur l'organe de la vue pendant un certain temps fini. Si donc cette impression n'est pas unique, continue, mais consiste en un grand nombre d'impressions partielles, nous ne les remarquons pas isolément, mais au contraire nous ne percevons que leur somme, l'impression totale qui en résulte. Si dès lors les vibrations lumineuses ont une durée moindre que le temps pendant lequel l'impression lumineuse doit agir pour être perceptible, nous n'aurons pas connaissance des effets de chacune des vibrations, mais de la somme de ces actions amassées pendant des périodes dont la durée est précisément le temps dont nous venons de parler. Pour qu'un faisceau de lumière pénétrant dans l'œil, paraisse d'un éclat constant, il n'est donc pas nécessaire que les amplitudes de chacune de ses vibrations conservent la même grandeur, mais que l'effet moyen de leur impression reste sans changer pendant le temps considéré, les amplitudes pouvant varier de

bien des manières dans certaines limites. La durée des vibrations lumineuses est du reste excessivement petite, comme nous allons le voir; aussi, afin de conserver toute la généralité possible, nous admettrons que l'amplitude peut changer, comme nous venons de le dire, pour un rayon de lumière polarisé rectilignement et d'intensité constante.

La *grandeur absolue* de l'amplitude des oscillations est bien au-delà des limites de nos mesures, il faut la considérer comme infiniment petite dans le sens physique du mot. Si les amplitudes avaient une grandeur qu'il nous fût permis de mesurer, en faisant passer la lumière à travers des ouvertures très-étroites, il devrait se produire des phénomènes rendus sensibles par des perturbations que les bords de l'ouverture occasionneraient dans les vibrations. De semblables faits n'ont jamais été observés, pas plus qu'on n'a pu comparer la densité de l'éther à celle d'un corps quelconque soumis à nos moyens de mesure.

Quant à la *durée des oscillations*, nous n'en pouvons pas davantage acquérir la connaissance par des moyens directs. Ces divers attributs des vibrations de l'éther, tout en étant perceptibles par l'organe de la vue, ne peuvent pas être confondus avec l'objet qui produit la sensation, et échappent complétement aux autres sens. Toutefois, nous pourrons mesurer cette durée en partant des différences que présente la lumière dans le trajet d'un rayon. Déjà Newton concluait du phénomène des anneaux colorés, que le long d'un rayon lumineux se suivaient des intervalles égaux d'une grandeur mesurable, dont deux consécutifs se trouvaient dans certains états opposés l'un par rapport à l'autre. Le rayon de lumière consisterait, d'après cela, en parties égales, contiguës, dont chacune est composée de deux des intervalles en question, dans des états contraires. Pour la théorie des ondulations, ces parties égales sont les ondes, les intervalles les moitiés d'une onde dans lesquelles les molécules de l'éther sont dans des états vibratoires opposés (voyez page 14). La durée d'une vibration se déduit de la grandeur de chacune de ces parties et de la vitesse de la lumière. Outre les anneaux de Newton, il y a encore un grand nombre de phénomènes, en particulier tous ceux appelés phénomènes de *diffraction*, qui prouvent clairement la périodicité d'un rayon lumineux, et permettent de déterminer la durée de la vibration des différentes espèces de lumières. Parmi ces derniers phénomènes, nous indiquerons de préférence une expérience ingénieuse que nous devons à l'illustre Fresnel, expérience à laquelle nous rattacherons étroitement, à cause de sa simplicité, nos recherches ultérieures sur les propriétés des vibrations de la lumière.

A l'aide d'un héliostat, on dirige horizontalement les rayons parallèles du

soleil, à travers une fente verticale *ss* (fig. 33), sur une lentille verticale cylindrique biconvexe L. Celle-ci réunit la lumière incidente en une ligne



Fig. 33.

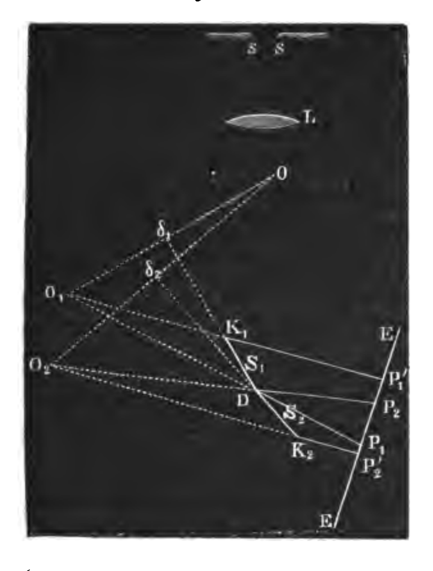
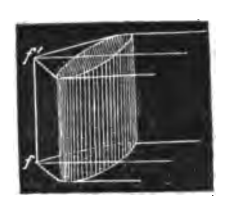
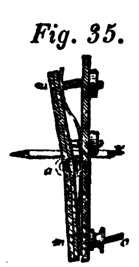


Fig. 34.



focale verticale ff' (fig. 34), dont la projection verticale sur un plan horizontal mené par un de ses points, est le point O de la figure. La lumière rayonnant de O, tombe sur deux miroirs plans de verre noir S_1 et S_2, qui se rencontrent suivant une ligne verticale projetée en D. Les surfaces de ces deux miroirs, dont la figure 35 représente une section facile à comprendre, se trouvent d'abord dans le même plan; ensuite, au moyen de la vis c on incline d'un très-petit angle un des miroirs sur l'autre. Les miroirs réfléchissent une partie de la lumière qui les frappe, et cette lumière réfléchie se comporte absolument comme si elle provenait des images de la ligne lumineuse O dans chaque miroir. Les images de la ligne focale sont évidemment verticales, et égales à cette ligne en longueur verticale, si les miroirs sont suffisamment grands. La projection O_1 de l'image, dans le miroir S_1, s'obtient en abaissant du point O une perpendiculaire $O\delta_1$ sur S_1, et prenant $\delta_1 O_1 = \delta_1 O$. De même, on trouve la position de O_2 pour le miroir S_2. La lumière réfléchie par S_1 éclaire l'espace compris dans l'angle dièdre, ayant pour arête l'image O_1, et dont les faces planes passent par O_1, et les bords verticaux D et K_1 de S_1. Sur un écran EE, il se formera donc deux bandes horizontales éclairées à la même hauteur que la ligne focale, et ayant la même dimension verticale qu'elle. L'une de ces bandes a pour longueur $P_1 P'_1$, et provient de la lumière du miroir S_1, l'autre a pour longueur $P_2 P'_2$, et est éclairée par la lumière du miroir S_2.

Fig. 35.



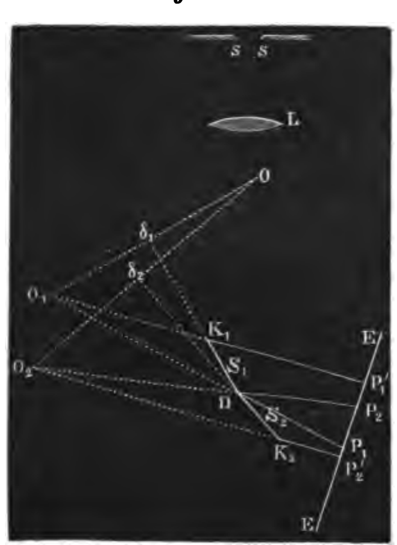
Ces bandes se recouvrent de P_1 en P_2, et la partie correspondante de l'écran est frappée par la lumière arrivant de l'un et de l'autre miroirs. Or, si l'inclinaison de ceux-ci est suffisamment petite, on aperçoit un certain nombre de raies colorées verticales qui, lorsque l'écran est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $O_1\ DO_2$, sont disposées symétriquement des deux côtés d'une ligne médiane blanche qui se trouve au milieu de l'espace $P_1\ P_2$. En partant de cette ligne moyenne blanche, et en avançant d'un côté, on saisit les nuances suivantes qui se succèdent sans interruption : blanc, rouge jaunâtre, noir, violet, bleu, — blanc, jaune, rouge, violet, bleu, — vert, jaune, rouge, vert bleuâtre, — rouge, vert bleuâtre, — rouge, vert bleuâtre et ainsi de suite. En colorant la lumière solaire, en plaçant, par exemple, devant la fente *ss* une lame de verre rouge aussi homogène que possible, ou bien en regardant l'écran à travers ce verre, on ne voit plus, au lieu des raies différemment nuancées, que des raies rouges alternant avec des raies noires. Dans ce cas, nous pourrons décrire le phénomène d'une manière plus précise. En y faisant bien attention, on voit que l'intensité de l'éclairement diminue graduellement de la partie moyenne d'une raie colorée qui paraît très-brillante, jusqu'à la partie moyenne d'une raie noire qui paraît le plus sombre. Le mot « raie brillante » indique seulement le lieu où l'œil saisit l'intensité la plus grande, de même que, par « raie obscure », on désigne l'endroit où l'éclairement est le plus faible. Les raies toutefois restent symétriques par rapport à celle du milieu. L'éloignement des raies les unes des autres va en croissant si l'on éloigne l'écran des miroirs, mais en même temps l'éclairement diminue pour des raisons faciles à voir. Les raies s'écartent encore si l'inclinaison des miroirs S_1 et S_2 diminue. Si l'on fait passer la lumière incidente à travers un prisme, et si on laisse pénétrer les unes après les autres par la fente *ss* les différentes parties du spectre formé par le prisme, on ne tarde pas à reconnaître que l'écartement des raies varie avec les différentes qualités de la lumière, que leur largeur diminue graduellement de l'extrémité rouge à l'extrémité violette du spectre, par conséquent devient moindre avec la vitesse de la lumière dans les milieux réfringents. Cela explique dès lors l'apparence des raies colorées quand on emploie de la lumière blanche. Examinons, par exemple, seulement la partie centrale de l'image. Elle provient de la superposition de toutes les raies moyennes des éléments colorés de la lumière blanche. Ces raies sont inégalement larges, mais elles ont la même ligne médiane, et aucune d'elles ne s'étend dans l'espace tout à fait brillant de chacune des deux raies qui comprennent la raie moyenne; de telle manière que la partie centrale se perd de chaque côté dans les espaces

obscures. La raie rouge s'étend par ses bords au-delà des autres raies, puis en suivant l'ordre de grandeur, vient la lumière orange, la jaune...., la violette. Dans la largeur de cette dernière, toutes les raies se recouvrent donc, et, par conséquent dans cette largeur, apparaîtra une raie brillante, blanche, présentant des deux côtés des franges également colorées. Au bord extérieur de cette frange se trouve seulement de la lumière rouge, puis vient une ligne verticale de rouge et d'orangé, puis successivement des raies de rouge, orangé et jaune; de rouge, orangé, jaune et vert; de rouge, orangé, jaune, vert et bleu; et enfin au centre de la frange, là où tous les éléments colorés sont réunis, du blanc pur, mélange de toutes les couleurs. Dans la frange centrale, ce sont donc les couleurs les plus réfrangibles qui se retirent successivement à mesure que l'on s'avance vers la partie externe de la frange. La ligne moyenne blanche de cette partie se perd donc des deux côtés dans une frange colorée en rouge jaunâtre, où le rouge occupe la partie extérieure.

Quelles conséquences sommes-nous en droit de conclure du phénomène que nous venons de décrire?

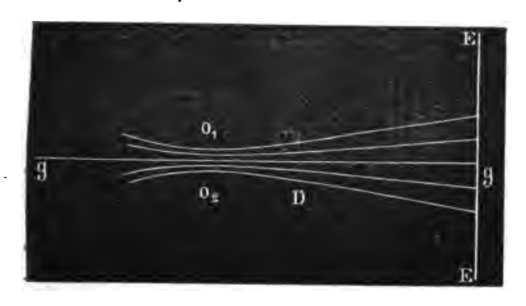
Dans l'expérience de Fresnel, tous les résultats sont les mêmes pour chaque plan horizontal mené par un point de la ligne focale; nous pouvons donc tout rapporter à un pareil plan, par exemple à celui de la figure 36. A la place des lignes lumineuses nous aurons les points O_1 et O_2, à la place des raies leurs intersections par un plan horizontal : celles-ci sont sur la ligne droite EE. Le fait que les divers points de la ligne droite EE présentent un éclat différent, nous pouvons l'attribuer à ce que les deux rayons qui éclairent ces points ont des positions relatives différentes, selon les points, ou en d'autres termes, à ce que la différence des chemins parcourus par les rayons que réfléchissent les deux miroirs, ou, ce qui revient au même, par les rayons qui émanent de chacune des images, change le long de la ligne EE. Si c'est bien là la raison, une raie déterminée, par exemple, la ligne la plus obscure dans

Fig. 36.



l'une des deux raies noires moyennes doit, quel que soit l'éloignement de l'écran, se propager suivant une hyperbole horizontale dont les foyers sont O_1 et O_2 (fig. 37) : parce que deux rayons émanant de O_1 et O_2 et se coupant en un point de cette hyperbole diffèrent constamment dans leur route de la même quantité. La mesure directe confirme ces conséquences. A chaque paire de raies également éloignées de la ligne médiane correspond ainsi une hyperbole dont les foyers sont toujours O_1 et O_2, et dont l'axe réel est égal à la différence des chemins parcourus par les deux rayons qui concourent pour former les raies. Seulement, pour la raie du milieu, l'hyperbole devient une ligne droite, qui est la direction de l'axe secondaire de toutes les hyperboles ; elle est le lieu géométrique des points également éloignés de O_1 et O_2 et par conséquent des points de rencontre des rayons dont les chemins sont égaux.

Fig. 37.



Pour trouver la différence des chemins correspondant à une paire de raies déterminée, ou la grandeur de l'axe réel de son hyperbole, il est essentiel avant tout de déterminer la distance des deux points O_1 et O_2. Pour cela on a besoin de l'inclinaison α des miroirs, mesurée avec un goniomètre de réflexion, et de la distance e des points O et D ; alors on aura

$$O_1 O_2 = 2 e \sin \alpha.$$

De plus, il faut déterminer la position de l'une des raies par rapport aux axes de son hyperbole. La distance d'une raie à l'axe secondaire est égale à la demi-distance des deux raies, et sa distance à l'axe principal est la somme de la distance de D à $O_1 O_2$ et de la longueur de la perpendiculaire Dg menée du point D à l'écran EE.

Par un calcul de géométrie analytique fort simple, on déduit alors la grandeur de l'axe de l'hyperbole, la longueur $O_1 O_2$, de la distance de l'écran au point D et de l'intervalle des deux raies. Représentons donc le demi-axe réel de l'hyperbole par A, sa demi-excentricité, c'est-à-dire, la quantité $e \sin \alpha$, par E, la courbe sera donnée par l'équation $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{E^2 - A^2} = 1$, en prenant l'axe principal pour axe des abscisses x, et l'axe secondaire pour celui des

ordonnées y. Si δ est la distance des raies, on aura pour l'une d'elles $x = \frac{\delta}{2}$
Si l'écran est distant du point D de la quantité d, sa distance au centre de l'hyperbole, c'est-à-dire, au milieu de la ligne $O_1 O_2$ est $d + e \cos \alpha$. Cette longueur n'est autre chose que l'ordonnée de la raie. Dès lors, celle-ci étant sur l'hyperbole, on aura :

$$\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{A^2} - \frac{(d + e \cos.\alpha)^2}{E^2 - A^2} = 1.$$

équation qui permettra d'obtenir A, au moyen des quantités mesurées e, E, d, δ et α.

Fresnel a fait ces différentes mesures pour les diverses parties du spectre. Il est d'abord parvenu à ce résultat, que pour la lumière monochromatique, les axes principaux des hyperboles qui correspondent en partant du milieu aux paires de raies successives alternativement brillantes et obscures, sont comme la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, ... Représentons par a la différence de chemin des rayons qui concourent à la formation de la ligne moyenne de la première raie obscure, les différences de chemin pour la seconde, la troisième, etc. raie obscure seront 3 a, 5 a, etc. Les différences de chemin des rayons formant le milieu de la raie centrale brillante et de la première, seconde, etc, des raies brillantes suivantes, seront 0, 2 a, 4 a, etc. Nous devons en outre nous figurer que les points O_1 et O_2 lancent leur lumière absolument de la même manière ; car, la ligne lumineuse O envoyant un rayon à un certain moment, la chose se passe absolument comme si au même instant deux rayons identiques partaient l'un du point O_1, l'autre du point O_2. Et ces rayons doivent être regardés comme également intenses, puisque les deux traits lumineux en lesquels la lumière de la ligne focale est divisée par les miroirs ont un éclat tout à fait égal. Sans commettre d'erreur sensible, nous pourrons, tant que la distance des miroirs à l'écran sera très-grande par rapport à la distance des images, regarder les rayons qui se rencontrent en un point de l'écran comme arrivant sensiblement dans la même direction. Alors les résultats de l'expérience conduisent à cette loi remarquable : *deux rayons lumineux identiques qui se propagent suivant la même direction et dont l'un est en avance sur l'autre d'un certain chemin* a *ou un nombre impair de fois cette quantité,* 3 a, 5 a....., *se détruisent ; au contraire ils se renforcent si leurs chemins sont égaux ou diffèrent d'un nombre pair de fois* a.

Si nous passons du milieu d'une raie obscure au milieu de la raie brillante la plus voisine, nous reconnaissons un accroissement continu d'intensité dans

la lumière, quelles que soient les deux raies que nous choisissions. Ainsi donc *de deux rayons identiques, presque coïncidants, dont les chemins parcourus diffèrent d'un nombre pair de fois a, si l'un vient à retarder sur l'autre, l'intensité de la lumière résultant de l'action simultanée des deux rayons diminue graduellement et enfin devient nulle si les deux rayons ont retardé l'un sur l'autre de* a. Les résultats remarquables auxquels nous sommes arrivés peuvent encore s'exposer de la manière suivante. Soient S_1 et S_2 deux rayons lumineux identiques parcourant le même chemin AB. Ils se composent en une nouvelle lumière dont l'intensité diffère suivant la situation de S_1 par rapport à S_2. S_1 et S_2 sont-ils dans le même état respectif que s'ils partaient tous deux au même moment et du même point A, par exemple, alors les rayons se renforcent, c'est-à-dire, que la force d'illumination du rayon S, dans lequel se confondent S_1 et S_2 surpasse celle de chacun de ceux-ci en particulier. Déplace-t-on maintenant un rayon par rapport à l'autre, c'est-à-dire, fait-on en quelque sorte glisser un peu le rayon S vers B d'une quantité AA', alors évidemment les états des deux rayons sont les mêmes respectivement en A pour l'un, en A' pour l'autre, de même qu'en les points situés à la même distance de A d'une part et de A' de l'autre et cela pendant toute la durée du mouvement lumineux de A et de A' vers B. Au contraire, les états de l'un et de l'autre rayon sur des points qui coïncident, seront en général différents d'une manière ou d'une autre. Aussi longtemps donc que la grandeur du déplacement AA' sera moindre que la longueur a dépendante de la nature du rayon, il y a toujours, comme nous l'avons vu, une lumière résultante. Mais son intensité diminue d'une manière continue, pendant que AA' croît de o jusqu'à a, et cesse même déjà d'être appréciable dans le voisinage de cette limite. Augmentons-nous le déplacement, l'intensité reparaît, elle atteint un maximum quand la différence de chemins AA' est double de a. Les mêmes rapports que l'on observe pour des différences de chemin compris entre o et $2\,a$ se montrent et dans le même ordre pour des déplacements compris entre $2\,a$ et $4\,a$, $4\,a$ et $6\,a$ et ainsi de suite. D'après tout cela, il est bien évident qu'il en serait absolument de même, quel que soit celui des deux rayons qu'on déplace, ou bien qu'on en déplace un par rapport à l'autre dans la direction du rayonnement ou dans la direction contraire, ou bien enfin qu'on en dérange un seul ou tous les deux en même temps, toujours l'intensité de la lumière résultante, abstraction faite des circonstances étrangères, dépend seulement de la grandeur de ce déplacement, de la différence des chemins parcourus.

Il est aussi important, pour apprécier la nature d'un rayon lumineux, de

faire remarquer ici que l'apparence des raies dans l'expérience des miroirs de Fresnel, s'observe encore même pour une différence de chemin des deux rayons égale à un nombre notable de fois la longueur a. A la vérité, cette observation n'est pas possible tant qu'on juge de l'existence des raies et par conséquent des renforcements et des destructions des rayons par l'image qui se projette sur un écran qu'on lui présente. Dans ce cas, en effet, on remarque que les raies s'étendent jusqu'à une certaine limite à droite et à gauche de la ligne médiane de l'image, et ensuite en perdant de la netteté elles s'effacent tout à fait. On en observera un bien plus grand nombre, qui s'étendront bien plus loin de la ligne moyenne et dès lors correspondront à de bien plus grandes différences de chemins parcourus, si on laisse tomber sur une lentille biconvexe une partie des rayons provenant des deux miroirs, et si on examine à l'aide d'une seconde lentille faisant l'office de loupe, l'image faite au foyer de la première. Cette image, on le comprend facilement, est formée comme celle qui se projette sur l'écran, d'une succession de raies alternativement brillantes et obscures. On obtiendra toujours de nouvelles raies analogues, qui, par conséquent, correspondent à de nouvelles différences de chemins, si en tournant l'axe des deux lentilles, on fait tomber sur la première de nouveaux rayons réfléchis par les miroirs. Outre cet avantage, cette manière d'observer permet de mesurer d'une manière bien plus précise la distance entre les différentes raies. Elle fut employée par MM. Fizeau et Foucault (1) pour observer des raies correspondant à une très-grande différence de chemin. Ces deux physiciens ont trouvé que deux rayons bleus, dont la qualité correspond à la raie F du spectre, peuvent encore se renforcer ou s'affaiblir mutuellement pour une différence de chemin de 3,474 fois la longueur a qui leur correspond. Pour avoir dans cette recherche de la lumière homogène, MM. Fizeau et Foucault faisaient passer la lumière réfléchie par les deux miroirs à travers une fente, et au moyen de la lumière traversant cette fente ils formaient un spectre de la manière qu'a indiquée Frauenhofer pour observer ses raies. Ce spectre est composé des images de la fente rangées à côté les unes des autres et formées par les rayons lumineux de diverses réfrangibilités. Dans un élément de ce spectre nous avons en conséquence l'image de la fente produite par les rayons dont la réfrangibilité est celle de cet élément, et les raies brillantes et obscures qu'on observe sont donc les images des raies brillantes et obscures formées par les rayons de la réfrangibilité correspondant à cette portion du spectre.

(1) *Annales de Physique et Chimie*, 1849.

Les faits exposés plus hauts nous conduisent ainsi à admettre à chaque moment sur la longueur d'un rayon lumineux des intervalles de longueur 2 *a*, qui se suivent l'un l'autre sans interruption. Chacun d'eux en outre consiste encore en deux moitiés qui sont l'une par rapport à l'autre en deux états opposés tels que leur coexistence a pour conséquence la destruction de la lumière. Enfin il faut qu'un très-grand nombre de ces intervalles qui se succèdent, soient absolument égaux ; car ce ne sera qu'à cette condition qu'il se pourra que deux rayons lumineux, distants l'un de l'autre d'environ 2000 fois la longueur d'un intervalle, puissent se renforcer ou s'affaiblir tout aussi bien que si les chemins parcourus ne différaient que d'une fraction d'intervalle, ou de quelques-uns seulement.

Dans ces intervalles nous reconnaissons les ondes lumineuses (Page 15) ; et l'expérience de Fresnel confirme ce que nous avons admis, que la longueur d'onde et par conséquent la durée de l'oscillation était constante pour une couleur et un milieu déterminés; elle prouve en outre que l'onde lumineuse se compose de deux moitiés dans lesquelles les états vibratoires doivent être regardés comme contraires (car ce n'est qu'ainsi qu'on pourra concevoir l'anéantissement du mouvement lumineux par la coexistence des états de deux moitiés), et en outre les états vibratoires qui se suivent depuis l'extrémité antérieure d'une moitié sont exactement opposés à ceux qui se suivent à la même distance de l'extrémité antérieure de l'autre moitié. L'écartement des raies change avec la qualité de la lumière, c'est encore une preuve à l'appui de notre hypothèse, que la qualité de la lumière est une fonction de la durée de l'oscillation ou de la longueur d'onde. L'expérience des deux miroirs nous permet de mesurer ces deux grandeurs pour les différentes qualités de lumière et Fresnel l'a fait lui-même : il a trouvé par le procédé que nous avons analysé plus haut, la longueur 2 *a*, c'est-à-dire, la longueur d'onde dans l'air, pour le milieu des bandes différemment colorées du spectre, et pour leurs limites. Les résultats de ses recherches sont réunis dans le tableau suivant :

COULEURS.	Longueurs d'onde dans l'air en millimètres.	COULEURS.	Longueurs d'onde dans l'air en millimètres.
Violet limite........	0,000406	Vert-jaune........	0,000532
Violet............	0,000423	Jaune............	0,000551
Violet-indigo......	0,000439	Jaune orangé.....	0,000571
Indigo............	0,000449	Orangé...........	0,000583
Indigo-bleu.......	0,000459	Orangé-rouge.....	0,000596
Bleu.............	0,000475	Rouge............	0,000620
Bleu-vert.........	0,000492	Rouge limite......	0,000645
Vert.............	0,000511		

La longueur d'onde, comme on le voit page 15, est égale au chemin parcouru par la lumière pendant la durée d'une vibration. Représentons donc cette longueur d'onde par λ, la durée de la vibration par δ, et la vitesse de la lumière par v, on a $\lambda = v\delta$, et la durée de la vibration s'en déduit, $\delta = \frac{\lambda}{v}$ soit n le nombre des vibrations dans l'unité de temps, alors $v = n\lambda$ d'où $n = \frac{v}{\lambda}$. Au moyen des nombres de Fresnel et de la vitesse de la lumière dans l'air, il est, d'après cela, facile de trouver la durée de la vibration pour chaque couleur et leur nombre dans l'unité de temps.

Si nous connaissons l'indice de réfraction pour le passage d'une couleur déterminée de l'air dans un autre milieu quelconque, nous pourrons aussi connaître la longueur d'onde pour ce milieu. En effet, soit λ la longueur d'onde de la couleur dans l'air, δ la durée de la vibration, v la vitesse de la lumière, et λ', v' les quantités analogues pour la même lumière dans le second milieu, on a, puisque la durée de la vibration ne change pas :

$$\lambda = v\delta \text{ et } \lambda' = v'\delta \quad \text{d'où}$$

$$\lambda' = \frac{v'}{v}\lambda.$$

et $\frac{v}{v'}$ est l'indice de réfraction pour le passage de la lumière colorée en question de l'air dans le second milieu. *Pour avoir la longueur d'onde dans un milieu, il suffit donc de diviser la longueur d'onde dans l'air par l'indice de réfraction de ce milieu par rapport à l'air.* Pour le vide et l'air le rapport $\frac{v'}{v}$ pour chaque couleur a la valeur constante 1,000294. Si nous

multiplions, pour avoir les longueurs d'onde dans le vide, les nombres de Fresnel obtenus plus haut par la valeur de l'indice de réfraction de l'air par rapport au vide, nous obtenons des nombres qui ne diffèrent de ceux de Fresnel que par la septième décimale. Nous pouvons donc prendre ces derniers pour les longueurs d'onde des différentes couleurs dans le vide, tant qu'aucune détermination plus certaine ne nous sera pas donnée. Divisons la vitesse de la lumière dans le vide obtenu par les procédés astronomiques, par les nombres de Fresnel, nous aurons pour le nombre de vibrations que fait une molécule d'éther dans une seconde sexagésimale pour chaque espèce de lumière, les résultats consignés dans le tableau suivant :

COULEURS.	Nombre de vibrations en 1″ évalué en billions.	COULEURS.	Nombre de vibrations en 1″ évalué en billions.
Violet limite.......	764	Vert-jaune.......	583
Violet............	735	Jaune...........	563
Violet-indigo......	797	Jaune orangé.....	543
Indigo............	691	Orangé..........	532
Indigo-bleu........	678	Orangé-rouge.....	520
Bleu.............	653	Rouge...........	500
Bleu-vert.........	630	Rouge limite......	481
Vert.............	607		

CHAPITRE V.

Représentation mathématique du mouvement lumineux.

Les différents faits que nous avons exposés dans les chapitres précédents nous mettent à même de nous représenter les vibrations lumineuses, surtout pour la lumière polarisée en ligne droite. Pour en avoir une idée bien déterminée, nous supposerons que nous avons des rayons du soleil parallèles traversant un cristal de spath calcaire, dont la petite diagonale est dans un plan horizontal, c'est-à-dire, des rayons dont le plan de polarisation est horizontal. Nous colorerons la lumière pour qu'elle soit homogène en la faisant passer à travers un verre rouge foncé, lequel n'est transparant que pour la

partie moyenne du rouge du spectre. Soit SS (fig. 38 et fig. 39), un rayon de cette lumière, c'est-à-dire, la ligne joignant une série de molécules d'éther qui, lorsqu'elles sont en repos, se trouvent sur la direction du faisceau lumineux, ou bien encore la ligne perpendiculaire à l'onde plane lumineuse. Chaque rayon du faisceau possédant à chaque instant la même propriété que le rayon SS, il nous suffira de bien examiner ce dernier. A un moment donné, soit a_1 une molécule qui va commencer une nouvelle vibration; il en sera de même pour les molécules a_2, a_3..... et a'_2, a'_3..... si a_1a_2, a_2a_3..... $a_1a'_2$, $a'_2a'_3$..... sont égaux aux longueurs d'onde dans l'air de la lumière en question, si l'on a donc : $a_1\ a_2 = a_2\ a_3 = ... = a_1\ a'_2 = a'_2\ a'_3 = ... = 0^{mm},000620$. Représentons cette longueur par λ. De a_1 jusqu'à a_2 se suivent sans interruption les mêmes états vibratoires et de la même manière que de a_2 en a_3, etc., ou de a'_2 en a_1, etc. L'intensité du rayon peut varier à différentes places, toutefois seulement dans des étendues qui sont très-grandes par rapport à la longueur d'onde. Admettons qu'il y ait devant nous une telle étendue, alors non-seulement les états vibratoires, mais encore les écarts des molécules de a_1 jusqu'en a_2 sont absolument égaux à ceux des molécules de a_2 jusqu'en a_3, etc. Les écarts des molécules sont, puisque la lumière est polarisée en ligne droite,

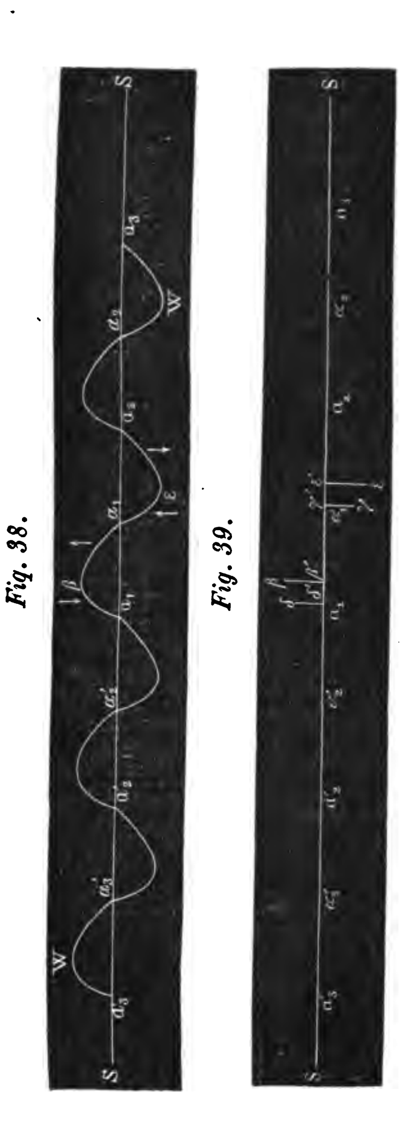


Fig. 38. Fig. 39.

tous parallèles entre eux et perpendiculaires à la ligne SS; ce qui veut dire que si on joint la position de chaque molécule à sa position d'équilibre, la

ligne de jonction est toujours perpendiculaire sur SS, et si le plan des oscillations se confond avec celui de la figure, cette ligne se trouve dans ce dernier. Les molécules sont donc sur une ligne qui, elle-même, est dans le plan de la figure. Cette ligne coupe le rayon SS aux points..... a'_3, a'_2, a_1, a_2, a_3....., puisqu'elle doit contenir aussi les molécules qui sont dans la position de repos, et les parties de la ligne qui sont entre a et a_2, a_2 et a_3, etc., sont égales entre elles. Soit α_1 le milieu de a_1 a_2 les molécules de a en α_1 sont dans des états tout à fait opposés à ceux des molécules comprises entre α_1 et a_2.. Cette opposition, nous ne pouvons la chercher ailleurs que dans ce que, pendant que les molécules entre a_1 et α_1 sont dans la dernière moitié de leur oscillation, celles entre α_1 et a_1 sont encore à faire la première. Si donc, ce que nous supposerons, les molécules de a_1 à α_1 sont écartées en dessus, celles entre α_1 et a_2 le sont en dessous; mais α_1 lui-même se trouve juste au milieu d'une vibration, par conséquent dans la position du repos, et dès lors, la ligne sur laquelle se trouvent les molécules tandis qu'elles oscillent de part et d'autre de la ligne SS coupe le rayon non seulement en a_1, a_2..... mais aussi en α_1 α_2..... Quant aux molécules situées entre a_1 et α_1, celles qui se suivent à partir de a_1 s'éloignent de leur position d'équilibre, jusqu'à ce qu'elles atteignent leur plus grand écart, et la distance à SS est d'autant plus grande que les molécules sont plus éloignées de a_1 jusqu'à une certaine molécule β qui a atteint son plus grand

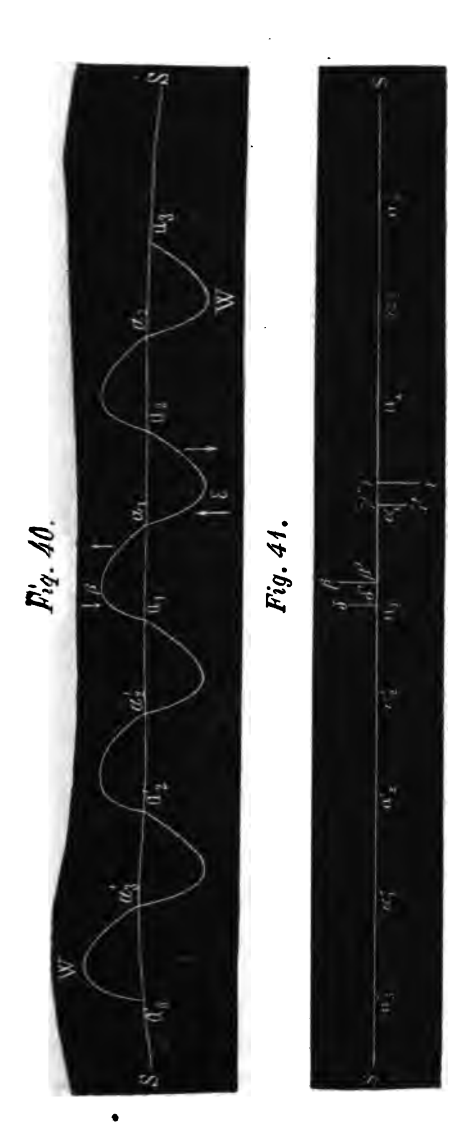


Fig. 40.

Fig. 41.

écart. Les molécules entre β et α_1 sont en train de regagner leur position de repos, et en sont d'autant plus rapprochées qu'elles sont plus voisines de α_1. De ce que la coexistence des états vibratoires qui se suivent de α_1 jusqu'à α_1 avec ceux qui sont entre α_1 et a_2, amène le repos, il faut évidemment que les molécules entre α et a_2, les plus voisines de α, soient en train de se rapprocher de la ligne SS. Une de ces molécules, par exemple γ', doit être autant éloignée de SS, en dessous, et se rapprocher de sa position de repos avec la même vitesse que la molécule δ', pour laquelle $\alpha_1\delta' = \alpha_1\gamma'$. En outre, la molécule dont la position de repos ε' est autant distante de α_1 que β' de a, a atteint également son maximum d'écart en dessous de SS. Enfin, de ε' à a_2 on retrouve les mêmes écarts et les mêmes vitesses que de β' à α_1, seulement en sens contraire des dernières. Le lieu des molécules d'éther, au moment considéré, sera donc d'après cela une ligne d'une forme analogue à la ligne WW. La direction de la vitesse dans chaque partie de la ligne, est représentée par les flèches dessinées à côté.

Pendant le temps que les molécules accomplissent leur mouvement de va et vient, chaque état particulier de ce mouvement se propage de molécule à molécule dans la direction a_1 a_2 avec la vitesse propre de la lumière, et il est évident que si nous faisons glisser la ligne WW dans la direction de la propagation de la lumière avec la vitesse de celle-ci, chaque molécule se trouve toujours sur la ligne WW et la perpendiculaire que l'on peut élever à SS par le point de repos, et elle possède un état vibratoire indiqué chaque fois par la partie de cette perpendiculaire comprise entre SS et WW. Soit par exemple a_1 $\beta\,\alpha_1\varepsilon\,a_2$ (fig. 42) le lieu des molécules après un quart de vibration. Les figures 43 et 44 donnent les lieux et les directions de mouvement des molécules après $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ de vibration : après une vibration entière les états identiques se reproduisent.

La forme de la ligne WW n'est pas encore parfaitement déterminée par ce qui précède. Nous savons seulement qu'elle se compose de portions égales a_1 a_2, etc., que chaque intervalle est formé par la réunion de deux parties $a_1\alpha_1$ et $\alpha_1 a_2$ qu'on peut superposer; enfin que la distance des points de ces moitiés, par exemple de la première, à la ligne SS, croissent d'abord à partir de a_1, atteignent un maximum, puis décroissent jusqu'en α_1, où la distance est nulle, que par conséquent WW coupe le rayon SS aux points a_1, α_1, a_2, etc. Cette propriété générale de la ligne tient évidemment à ce que, soit en allant soit en revenant, l'écart rectiligne d'une molécule dans la première moitié d'une vibration est le même que dans la seconde, à ce que les vibrations se propagent avec une vitesse égale, et à ce que beaucoup de ces vibrations, qui

se suivent les unes les autres et forment la partie de la ligne ondulatoire que nous considérons, sont tout à fait égales. Mais la forme d'une moitié des in-

Fig. 42.



Fig. 43.

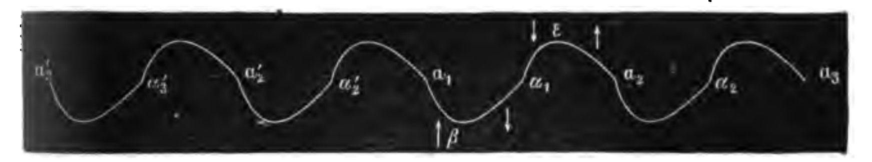


Fig. 44.



tervalles a_1 a_2, etc., dépend en outre du mode de mouvement dans une allée et un retour, de la relation entre l'écart et le temps. Soit pour une molécule déterminée, y cet écart correspondant au temps t, celui ci étant compté à partir du moment où commence une nouvelle vibration. La relation entre l'écart et le temps peut se représenter par une équation de la forme :

$$G. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = f\,(t).$$

Soit une seconde molécule a éloignée de x dans la direction de la propagation, de la molécule a_1 qui commence son oscillation pour le temps $t = o$. Le temps qui sépare le commencement de l'oscillation de la molécule a de celui de la molécule a_1, est égal au temps que la lumière emploie pour aller de a_1 en a : la valeur de ce temps est $\frac{x}{v}$ si v est la vitesse de la lumière, et alors l'écart de la molécule a sera donné par l'équation $y = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Les grandeurs y et x sont l'ordonnée et l'abscisse de la ligne d'onde, comptées à

partir du point a, dans la direction de la propagation ; et dès lors cette équation représente la courbe de l'onde dans toutes les parties dont les intervalles sont regardés comme égaux. Il nous reste à nous demander quelle sera la forme de la fonction f.

Évidemment la fonction f doit être périodique et la durée de sa période doit égaler la durée de la vibration δ, ce qui veut dire que pour des valeurs de t, différant entre elles d'un certain nombre de fois δ, la fonction f doit reprendre des valeurs égales, ainsi par exemple pour les valeurs t, $t + \delta$, $t + 2\delta$....., dans lesquelles t est un temps quelconque. Il est en outre nécessaire que pour les temps $t = o$, $t = \frac{\delta}{2}$, $t = 2\frac{\delta}{2}$, etc., en un mot pour chaque temps égal à un certain nombre de fois la demi-durée de la vibration, l'équation G fasse évanouir l'écart y, car à ces moments-là la molécule passe à sa position de repos, l'écart y est nul. Enfin la fonction f doit jouir de cette propriété, que, pour des valeurs de t comprises dans la première moitié d'une vibration, elle donne à y des valeurs égales, mais de signes contraires, à celles que prend y pour les temps correspondants dans la deuxième moitié ; car, pour deux moments qui sont également distants du commencement et du milieu de la vibration, y doit nécessairement avoir la même valeur absolue, puisque pour de pareils instants la molécule est également éloignée de la position du repos, une fois d'un côté de cette position, une autre fois de l'autre. Une fonction de cette espèce, quelle que soit du reste sa forme, peut toujours se représenter par une série convergente indéfinie, dont les termes ont la forme $A_m \text{Sin.}\, m\frac{2\pi}{\delta}t$, où m représente le rang du terme et A^m une constante qui dépend de ce nombre. L'expression analytique du mouvement sera donc :

$$y = A_1 \text{Sin.} \frac{2\pi}{\delta} t + A_2 \text{Sin.} \frac{4\pi}{\delta} t + \ldots\ldots \text{ à l'infini.}$$

Rien ne sera contraire aux expériences indiquées jusqu'à présent, si nous réduisons cette expression à son premier terme pour représenter le déplacement d'une molécule ; nous remarquerons par anticipation qu'en admettant cela, tous les phénomènes lumineux connus peuvent s'expliquer. Nous exprimerons donc les lois des vibrations lumineuses par l'équation suivante :

$$\text{I.} \qquad y = a \text{ Sin.} \frac{2\pi}{\delta} t,$$

dans laquelle la lettre a remplace la constante A_1.

Le mouvement représenté par l'équation I, donne maintenant les lois suivantes :

Pour le temps $t = o$, $y = o$, ce qui veut dire que le déplacement de la molécule est nul, elle se trouve au repos. Depuis $t = o$ jusqu'à $t = \frac{\delta}{4}$ les déplacements y perpendiculaires à la direction du rayon, sont positifs et croissent avec le temps, cela signifie que la molécule s'éloigne toujours et vers le haut, de sa position de repos, elle atteint son plus grand déplacement a pour le temps $t = \frac{\delta}{4}$, c'est-à-dire, après le quart de la période. A partir de là, la valeur d'y, pendant que le temps croît de $\frac{\delta}{4}$ à $\frac{\delta}{2}$, diminue de la même manière qu'elle avait augmenté auparavant : la molécule se rapproche de sa position primitive. Elle l'atteint quand y redevient nul; puis y est négatif et depuis $t = \frac{\delta}{2}$ jusqu'à $t = \frac{3\delta}{4}$ il repasse par les mêmes accroissements en valeur absolue ; la molécule se déplace alors en dessous et atteint de ce côté, après trois quarts de période, son plus grand déplacement a. Pendant le dernier quart de la période, la molécule se rapproche de sa position de repos, comme elle s'en était éloignée pendant le quart précédent, et elle revient enfin à sa position primitive, quand la première période est écoulée, pour ensuite osciller absolument de la même manière de part et d'autre de cette position une seconde fois, puis une troisième, etc. La valeur de la vitesse que possède la molécule d'éther en chaque point de son trajet, sera, si on la représente par e,

$$e = \frac{dy}{dt} = \frac{2a\pi}{\delta} \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\delta} t.$$

Elle a au commencement de chaque nouvelle oscillation, partant à la fin de la précédente, sa plus grande valeur positive, elle diminue à partir de là, sans changer de direction, jusqu'à ce que la molécule ait atteint son plus grand écart du côté des ordonnées positives, et alors elle est nulle. Elle change de sens et croît graduellement, jusqu'à ce que la molécule, au milieu d'une oscillation, passe par la position du repos, à ce moment la vitesse a sa plus grande valeur négative : celle-ci est égale en grandeur au premier maximum positif. Pendant le troisième quart suivant de la vibration, la vitesse diminue comme pendant le premier quart, elle atteint la valeur 0 à la fin de cette partie de la période, change de sens, et se rapproche enfin dans le dernier quart de la plus grande valeur positive qu'elle atteint à la fin de la vibration et au commencement de la suivante.

Le mouvement représenté par l'équation I, consiste donc en vibrations isochrones et de même longueur, de la molécule autour de sa position d'équilibre, lesquelles sont rectilignes. La direction de ces vibrations est constante et perpendiculaire au rayon. Chaque vibration consiste en deux moitiés dans lesquelles des états opposés se succèdent de la même manière : ce sont là toutes des propriétés que nous avons déduites des phénomènes observés dans le mouvement lumineux. D'après cela, δ est la durée de la vibration, grandeur qui change avec la qualité de la lumière et qui est déterminée pour les différentes couleurs par les expériences de Fresnel. Si par exemple, l'équation I doit représenter le mouvement de la lumière rouge moyenne, il faut prendre pour δ la valeur $\frac{1}{500 \text{ billions}}$, d'après le tableau de la page 65. De plus, a est l'amplitude de la vibration, quantité infiniment petite, qui échappe à nos moyens de mesure. Cette quantité peut changer sur un rayon de distance en distance, pourvu que ces distances soient grandes par rapport à une longueur d'onde ; en d'autres termes, l'amplitude peut changer d'un temps à un autre, mais elle reste sensiblement de la même grandeur pour un très-grand nombre de vibrations. En outre l'impression totale des diverses vibrations, dont les impressions particulières de chacune augmentent ou diminuent en force avec a, reste constante pour le temps que doit durer un mouvement lumineux s'il doit être perceptible à l'œil. Mais l'équation I représentant seulement une série de vibrations tout à fait égales, ne peut être appliquée qu'à une partie des vibrations d'un rayon, et pour pouvoir l'employer pour une autre partie, il faut donner à la grandeur a une autre valeur.

S'accordant dans ce qu'il a de général avec le mouvement de la lumière déterminé par l'expérience, le mouvement représenté par l'équation I offre ceci de particulier que l'écart augmente ou diminue comme le sinus du temps multiplié par une constante. Enfin l'identification complète des deux mouvements est encore justifiée par cette circonstance que la force accélératrice du mouvement I, suit la même loi que celle qui agit sur une molécule d'un corps élastique quelconque, par exemple, un ressort, un fil métallique, faisant de très-petites oscillations rectilignes autour de sa position d'équilibre. La mécanique analytique indique en effet que dans le cas des oscillations infiniment petites d'un ressort, d'un fil métallique, etc., la force est à chaque instant proportionnelle à l'écart : la même chose résulte de l'équation I. En effet la force accélératrice s'en déduit par l'égalité

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -a\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \text{Sin.} \frac{2\pi}{\delta} t = -\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 y.$$

Si donc nous regardons l'équation I comme celle du mouvement lumineux, nous pourrons faire les hypothèses très-vraisemblables, que les forces élastiques de l'éther agissent sur une molécule écartée de sa position d'équilibre, de telle manière qu'il en résulte une force qui tend sans cesse à ramener la molécule vers cette position et qui reste proportionnelle à la grandeur de l'écart. Comptons le temps t de manière que l'équation I représente le mouvement d'une molécule d'éther a_1 sur le rayon SS (fig. 38), et comptons les abscisses positives à partir de a_1 dans le sens de la propagation du rayon, alors d'après ce que nous avons vu à la page 64, la ligne WW (fig. 39), sur laquelle se trouvent les molécules au bout du temps t, est représentée par l'équation suivante :

$$y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\delta}\left(t - \frac{x}{v}\right) = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{v\,\delta}(v\,t - x).$$

Le produit $v\delta$ qui entre dans cette équation, c'est l'espace parcouru par la lumière pendant la durée d'une vibration, par conséquent c'est la longueur d'onde, que nous avons déjà représentée par λ, de telle sorte qu'on peut encore écrire :

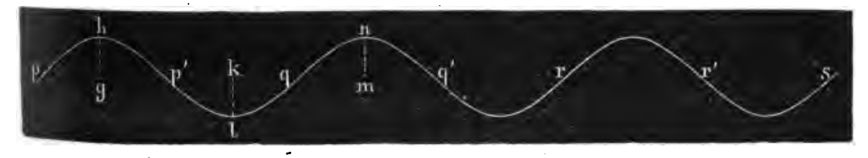
$$\text{II.} \qquad y = a. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(v\,t - x).$$

Si nous déplaçons l'origine des x de la ligne WW construite pour un temps déterminé t', le long du rayon SS dans la direction $a_3\, a$, de la longueur que la lumière parcourt depuis $t = o$ jusqu'à $t = t'$, par conséquent de vt', nous obtiendrons pour l'équation de la ligne :

$$y = -\, a. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}\, x$$

laquelle se confond évidemment avec la ligne WW déterminée pour le temps $t = o$. Cette équation est celle d'une *sinusoïde* dont l'axe se confond avec le rayon, dont la hauteur est a et dont la longueur est égale à la longueur d'onde λ. La figure 45 représente une de ces courbes dont gh est la hauteur et pq

Fig. 45.



la longueur. Cette forme générale s'accordant avec celle c la ligne WW relativement à la lumière, la sinusoïde ou la ligne onduleuse de la lumière

coupe son axe ps ou le rayon en des points également distants les uns des autres, p, p', q, q', r, r', s, qu'on appelle *nœuds*. Une des longueurs consiste en deux moitiés contiguës, mais placées en sens contraire, php', $p'lq$; et chaque moitié à son tour est partagée en deux parties voisines par sa plus grande ordonnée gh et kl. La ligne onduleuse glisse le long du rayon pendant le mouvement de la lumière dans la direction de ce dernier et avec la vitesse de progagation de la lumière.

L'équation II nous donne pour le mouvement d'une molécule dont l'ordonnée est x' l'équation

$$y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x').$$

La vitesse de cette molécule au bout du temps t' est par conséquent

$$1) \qquad \frac{dy}{dt'} = a\frac{2\pi v}{\lambda} \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt' - x').$$

Faisons dans l'équation II, $t = t'$, nous obtiendrons pour la ligne onduleuse au temps t',

$$y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt' - x).$$

Menons à cette ligne, au point où se trouve la molécule dont l'abscisse est x', une tangente et représentons par α l'angle que fait cette tangente avec le rayon, on a

$$2) \qquad \text{tang. } \alpha = \frac{dy}{dx'} = -a\frac{2\pi}{\lambda} \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt' - x').$$

D'après les équations 1) et 2), nous voyons que la vitesse d'une molécule dans son trajet est proportionnelle à la tangente de l'angle que font entre eux le rayon et la tangente que l'on peut mener à la courbe onduleuse, au point où la molécule à ce moment-là se trouve sur la courbe.

Si au lieu de compter le temps t à partir du commencement d'une vibration, comme cela est supposé dans l'équation I, nous le comptons à partir d'un moment différent de ce commencement de τ, τ étant positif ou négatif, suivant que le nouveau moment est après ou avant le commencement de la vibration, le mouvement, dont l'équation pour l'ancien temps était I, sera représenté pour le nouveau temps par :

$$\text{I}'. \qquad y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\theta}(t + \tau).$$

De même, si au lieu de prendre le point a_1 pour origine, nous prenons un autre point dont l'abscisse est ξ, le mouvement ondulatoire dont l'équation est II, sera maintenant représenté par l'équation

$$2') \qquad y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x - \xi).$$

Et si nous ne comptons pas le temps à partir du commencement de l'oscillation de la molécule a_1, mais à partir d'un moment qui en diffère de τ, alors à la place de l'équation II, on aura la suivante :

$$2'') \qquad y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + v\tau).$$

Comptons-nous enfin le temps à partir d'un moment quelconque τ, et les abscisses à partir d'un point dont l'abscisse est ξ, pris à volonté, nous obtiendrons à la place de l'équation II, comme forme la plus générale de l'équation du mouvement des ondes,

$$y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x - \xi + v\tau),$$

ou bien, en représentant la quantité arbitraire $v\tau - \xi$ par A,

$$\text{II}' \qquad y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + \text{A}).$$

La constante A, qui entre ici, se nomme la *phase* du mouvement ondulatoire.

Les équations de deux mouvements ondulatoires dont les rayons sont les mêmes, seraient :

$$\text{W}\ldots\ldots \quad y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + \text{A}),$$

$$\text{W}'\ldots\ldots \quad y = a' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + \text{A}').$$

Si nous comptons les abscisses à partir du point dont l'abscisse est A, à la place de ces deux équations nous aurons les deux suivantes :

$$\text{W}\ldots\ldots \quad y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x),$$

$$\text{W}'\ldots\ldots \quad y = a' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + \text{A}' - \text{A}).$$

Comparons ces équations avec 2') et 2''), nous voyons que la courbe du rayon W' sera en *arrière* de celle du rayon W, par rapport au sens de la propagation d'une quantité A' — A, c'est-à-dire, de la *différence des phases*, si A' — A est négatif ; au contraire elle sera poussée en *avant* dans le sens du mouvement, si A' — A a un signe positif. Chaque oscillation commence dans le rayon W', *plus tôt* ou *plus tard* de la valeur absolue $\frac{\text{A}' - \text{A}}{v}$, suivant que la différence des phases est positive ou négative.

CHAPITRE VI.

Interférence de la lumière polarisée en ligne droite.

Des phénomènes que présente l'action simultanée de deux faisceaux de rayons parallèles ou inclinés l'un sur l'autre d'un très-petit angle, nous avons tiré les données dont nous avions besoin pour acquérir une idée nette de la propagation de la lumière polarisée en ligne droite et pouvoir représenter le mouvement de l'éther par une formule mathématique. Réciproquement nous devons pouvoir maintenant expliquer tous ces phénomènes sans exception, au moyen de l'expression mathématique, et la vérification expérimentale des conséquences ultérieures que l'on peut encore tirer de la formule, sera une preuve décisive de la justesse de la théorie. Pour arriver à obtenir l'un et l'autre de ces résultats, nous devons nous demander d'abord suivant quelle loi se combinent plusieurs mouvements lumineux, se propageant dans la même direction.

Soient y_1, y_2, etc., les écarts d'une molécule d'éther, qui correspondraient à plusieurs rayons séparés polarisés en ligne droite, arrivant simultanément, mais dont les plans de polarisation sont inclinés l'un sur l'autre d'une manière quelconque. Ainsi, par suite du mouvement d'un des rayons, y_1 serait l'écart d'une molécule d'éther au bout du temps t, par suite du second mouvement, y_2 serait l'écart de la même molécule au bout du même temps, etc. Les forces accélératrices qui agissent sur la molécule quand les mouvements existent isolément, seront représentées respectivement par les quotients différentiels $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y_2}{dt^2}$, etc., et ces forces accélératrices se composent ensemble en la force accélératrice du mouvement résultant des mouvements isolés.

A.

Dans le cas particulier où les écarts y_1, y_2... ont la même direction, où par conséquent tous les rayons ont un plan de polarisation commun, la force accélératrice du mouvement résultant sera la somme des forces accélératrices des mouvements particuliers. Représentons donc par Y l'écart réel correspondant au mouvement résultant, la force accélératrice de ce dernier sera $\frac{d^2 Y}{dt^2}$ et nous aurons par suite :

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d^2y_2}{dt^2} + \ldots = \frac{d^2(y_1 + y_2 + \ldots)}{dt^2}.$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d(y_1 + y_2 + \ldots)}{dt} + \text{const.} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} + \ldots + \text{const.}$$

Les quotients $\frac{dY}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}$, etc., ne sont autre chose que les vitesses de la molécule d'éther correspondant au mouvement résultant et à chaque mouvement partiel. Si maintenant, au commencement du mouvement et pendant tout le temps qu'il a lieu, aucune autre force n'agit que la force élastique propre de l'éther, alors au commencement du mouvement, la vitesse du mouvement résultant sera la somme des vitesses partielles. Pour ce moment-là et aussi pour tous les suivants, la constante d'intégration est donc nulle et nous avons :

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} \ldots = \frac{d(y_1 + y_2 + \ldots)}{dt}.$$

Une nouvelle intégration conduit à l'équation :

$$Y = y_1 + y_2 + \ldots + \text{constante}.$$

Nous voyons d'après cela, qu'à chaque instant l'écart du mouvement résultant est égal à la somme des écarts des mouvements partiels, augmentée d'une constante. Cette grandeur constante ne surpasse pas évidemment les limites non mesurables des amplitudes lumineuses, et ne modifie pas non plus du reste le phénomène quand même elle ne serait pas nulle, puisqu'elle produit seulement un déplacement des lignes d'ondes correspondantes aux écarts Y, dans le sens même de ces écarts. L'idée de ce déplacement ne s'accorde pas du reste avec la supposition qu'au commencement du mouvement les forces internes agissent seules, et que les molécules du rayon n'ayant reçu aucune vitesse venant du dehors, ne peuvent pas dès lors éprouver un pareil déplacement. Nous poserons d'après cela

$$\text{const.} = o \text{ et } Y = y_1 + y_2 + \ldots$$

Cette équation nous apprend que *l'ordonnée de la ligne onduleuse résultante est égale à la somme des ordonnées de toutes les lignes onduleuses des mouvements concomitants.* C'est là la loi simple de l'action simultanée, de l'*interférence* des rayons polarisés en ligne droite, dont les plans de polarisation se confondent.

Appliquons-la au cas le plus simple et le plus fréquent. Considérons deux rayons S_1 et S_2 homogènes et de même couleur, c'est-à-dire, de même longueur d'onde. On a pour équation de leurs mouvements :

$$\text{pour } S_1 : \quad y_1 = a_1 \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + A_1),$$

$$\text{pour } S_2 : \quad y_2 = a_2 \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + A_2).$$

Représentons l'écart du mouvement résultant S par y, nous aurons d'après la loi des interférences développée plus haut :

$$y = a_1 \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + A_1) + a_2 \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + A_2)$$

$$y = \left(a_1 \text{ Cos. } \frac{2\pi A_1}{\lambda} + a_2 \text{ Cos. } \frac{2\pi A_2}{\lambda}\right) \text{Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x)$$

$$+ \left(a_1 \text{ Sin. } \frac{2\pi A_1}{\lambda} + a_2 \text{ Sin. } \frac{2\pi A_2}{\lambda}\right) \text{Cos. } \frac{2\pi}{\lambda} vt - x)$$

pour abréger, posons, ce qui est toujours permis :

$$1) \qquad a_1 \text{ Cos. } \frac{2\pi A_1}{\lambda} + a_2 \text{ Cos. } \frac{2\pi A_2}{\lambda} = a \text{ Cos. } \frac{2\pi\varphi}{\lambda}$$

$$\text{et } 2) \qquad a_1 \text{ Sin. } \frac{2\pi A_1}{\lambda} + a_2 \text{ Sin. } \frac{2\pi A_2}{\lambda} = a \text{ Sin. } \frac{2\pi\varphi}{\lambda},$$

ou en d'autres termes, déterminons, ce qui est toujours possible, deux grandeurs a et φ ayant avec les grandeurs données a_1, A_1, a_2, A_2 et λ, les relations indiquées par les dernières équations. Nous aurons alors pour S l'équation :

$$y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + \varphi)$$

dans laquelle φ représente l'angle tiré de 1) et 2) et où les mêmes équations donnent pour a :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \text{ Cos. } (A_1 - A_2) \frac{2\pi}{\lambda}}$$

Nous voyons d'après cela que les rayons S_1 et S_2 se composent en un nouveau rayon, dont la longueur d'onde est la même que celle de ces rayons, mais dont l'intensité et la phase diffèrent en général des quantités analogues dans les rayons composants. Bornons-nous ici à examiner l'intensité : elle atteint avec la grandeur a qui la mesure, un maximum quand Cos. $(A_1 - A_2) \frac{2\pi}{\lambda}$ devient égal à l'unité positive, c'est-à-dire, quand la différence des phases $A_1 - A_2$ est un multiple de λ ou un multiple pair de $\frac{\lambda}{2}$, ou ce qui revient au même, quand un des rayons est en avance sur l'autre de $0 \frac{\lambda}{2}$, $2 \frac{\lambda}{2}$,

$4\frac{\lambda}{2}$ etc. Quand la différence des phases diminue à partir d'un pareil multiple que nous représenterons par $2n\frac{\lambda}{2}$, a devient moindre et en même temps l'intensité du rayon résultant. La grandeur a atteint enfin sa plus petite valeur possible $a_1 - a_2$, l'intensité devient un minimum, quand la différence de phase a augmenté depuis $2n\frac{\lambda}{2}$ jusqu'au multiple impair suivant $(2n+1)$ $\frac{\lambda}{2}$ de la demi-longueur d'onde, car alors Cos. $\frac{2\pi}{\lambda}(A_1 - A_2)$ est égal à -1. La différence de phases continuant à croître, a et par conséquent l'intensité augmentent de nouveau, et atteignent enfin, quand $A_1 - A_2$ a crû de toute une longueur d'onde, les mêmes valeurs qu'elles possédaient précédemment. Pour un déplacement relatif entre des rayons S_1 et S_2, les cas que nous venons d'observer se reproduisent successivement jusqu'à ce que $A_1 - A_2$ ait augmenté de deux longueurs d'onde, et ainsi de suite. Dans le cas particulier où S_1 et S_2 ont la même intensité, la valeur maximum de l'amplitude de S qu'il atteint quand S_1 et S_2 sont en retard l'un par rapport à l'autre de $2n\frac{\lambda}{2}$, est égale au double de l'amplitude de chaque rayon partiel. Après cela l'amplitude de S diminuera pendant que le déplacement relatif augmente jusqu'à $(2n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$, elle diminue davantage pour une différence plus grande et disparaît enfin complétement si l'un des rayons est en avance sur l'autre de $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$, alors les rayons S_1 et S_2 se détruisent mutuellement. Si la différence des phases continue à croître jusqu'à $(2n+\frac{3}{2})\frac{\lambda}{2}$, l'amplitude de S croît jusqu'à a, elle continue à croître avec la différence, jusqu'à sa valeur maximum $2a$, qu'elle atteint pour la différence de phases $(2n+2)\frac{\lambda}{2} = 2(n+1)\frac{\lambda}{2}$. Pour mieux faire comprendre ces interférences on a représenté dans les figures 46, 47, 48 et 49, les différents cas correspondants aux différences de phases $2n\frac{\lambda}{2}$, $(2n+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$, $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$, $(2n+\frac{3}{2})\frac{\lambda}{2}$. S_1 et S_2 sont les lignes d'ondes des rayons composants et S celle du rayon résultant.

Les rayons S que nous avons considérés, sont supposés être formés

d'ondes absolument égales, mais nous n'avons aucune raison d'admettre la même chose dans la lumière polarisée avec laquelle nous faisons nos expériences. Nous devons plutôt regarder un de ces rayons comme composé de

Fig. 46.

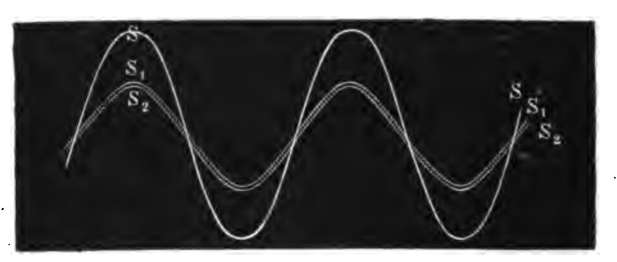
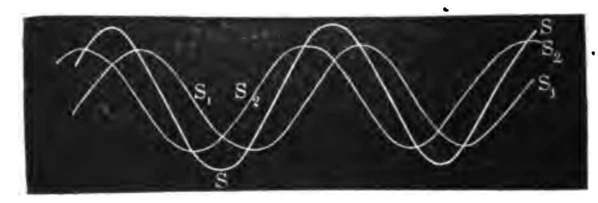


Fig. 47.



plusieurs files d'ondes consécutives extrêmement longues, dans lesquelles, d'une file à l'autre, les amplitudes varient, tandis que dans chaque file elles sont égales, de telle sorte que nous ne pouvons représenter par des équations de la forme de celle de S que chaque file séparément, et pour passer d'une file à l'autre il faut changer la quantité a. Un rayon Σ_1 (fig. 50), est composé alors de m_1 ondes d'amplitude a_1, m_2 d'amplitude a_2, etc. Dans nos expériences nous plaçons à côté d'un pareil rayon, un second rayon Σ_2 émanant de la même source, qui cependant a subi dans son intensité d'autres changements que le premier et est en retard sur celui-ci. Il est évident que les changements d'amplitude seront les mêmes dans toute sa longueur. Le rayon Σ_2 est formé, d'après cela, de m_1 ondes d'amplitude μa_1, de m_2 d'amplitude μa_2, etc., si μ est le rapport entre les amplitudes de Σ_1 et celles de Σ_2. Le nombre des ondes dont Σ_2 retarde sur Σ_1 est toujours très-petit par rapport aux très-grands nombres m_1, m_2, etc. : supposons que Σ_2 soit en retard sur Σ_1 de ε ondes. Si les deux rayons arrivent maintenant ensemble, le rayon Σ résultant se compose 1° d'ε ondes d'amplitude a_1, 2° d'une portion de $m_1 - \varepsilon$ longueurs d'ondes dans laquelle interfèrent des ondes d'amplitude a_1 et μa_1,

3° d'une portion d'ε ondes dans laquelle interfèrent des ondes d'amplitude a_2 et μa_1, 4° d'une portion de $m_2 - \varepsilon$ longueurs d'onde, résultant de l'interfé-

Fig. 48.

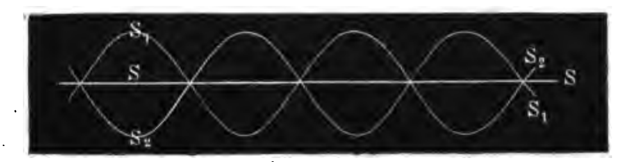
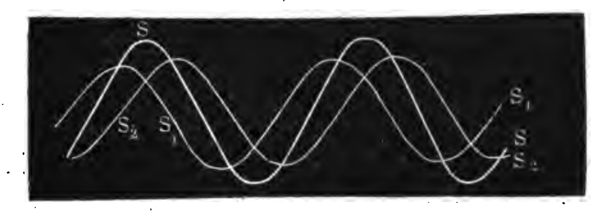


Fig. 49.



rence d'ondes d'amplitude a_2 avec d'autres d'amplitude μa_2, et ainsi de suite. Les espaces de longueur $\varepsilon\lambda$ qui alternent avec ceux de longueur $(m_1 - \varepsilon)\lambda$, $(m_2 - \varepsilon)\lambda$, etc., disparaissent devant ces derniers, et la chose se passe à peu près comme si le rayon résultant consistait en parties de longueur $m_1\lambda$, $m_2\lambda$,..... provenant de l'interférence d'ondes dont les amplitudes sont respectivement a_1 et μa_1, a_2 et μa_2, et qui sont en retard de $\varepsilon\lambda$ l'une par rapport à l'autre. Soit maintenant Σ'_1 un rayon formé d'ondes tout à fait égales, dont l'amplitude a_n est tellement choisie que ce rayon produise sur l'œil la même impression que le rayon Σ_1, et aussi Σ'_2 un rayon partout de même intensité mais dont l'amplitude est μa_n, ce dernier fera nécessairement sur l'œil le même effet que le rayon Σ_2. Si le rayon Σ'_2 est en retard de $\varepsilon\lambda$ sur Σ'_1 il y aura évidemment entre Σ'_1 et Σ'_2 les mêmes interférences qu'entre Σ_1 et Σ_2, et le rayon Σ' résultant de ceux-là sera par rapport à Σ'_1 et Σ'_2 toujours dans le même rapport physique qu'une des longueurs $m_1\lambda$, etc., de Σ par rapport aux longueurs correspondantes sur Σ_1 et Σ_2, de même aussi qu'en particulier l'intensité de Σ' sera la même que celle de Σ. Nous voyons d'après cela, qu'à la place de chacun des rayons à amplitudes inégales donnés par l'expérience, nous pouvons supposer plus simplement des rayons d'ondes identiques, en retard les uns par rapport aux autres comme le sont les rayons réels, et dont les amplitudes sont telles que les intensités résultantes sont les mêmes que celles des rayons donnés; en outre le nouveau rayon, résultant des rayons

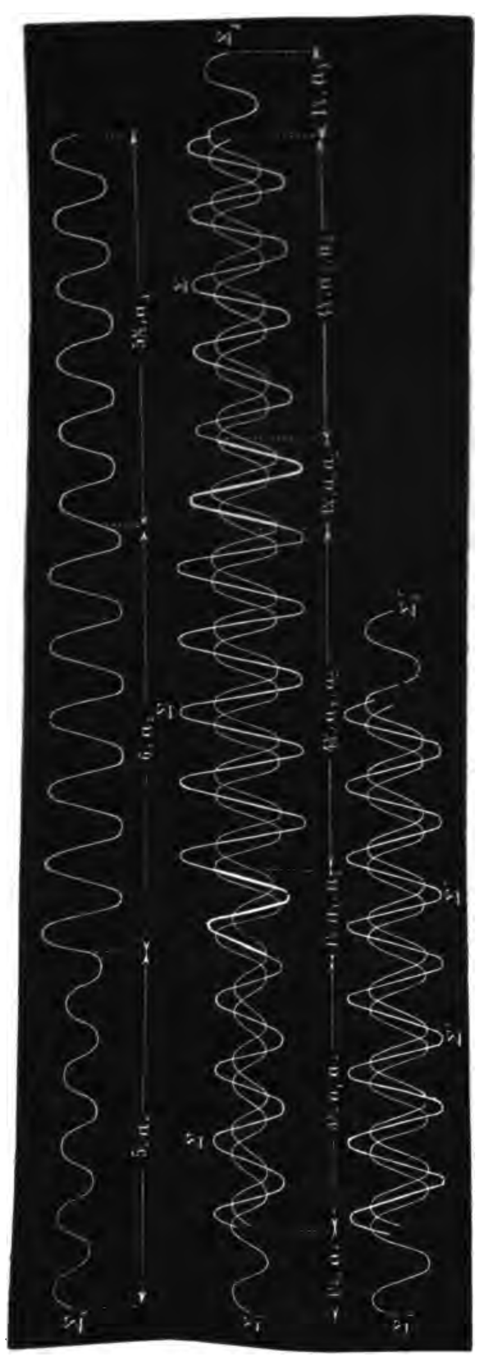


Fig. 50.

supposés, offrira les mêmes rapports avec ceux-ci que ceux qui existent entre les rayons donnés et le nouveau rayon auquel ces derniers donnent naissance. La figure 50 représente les cas que nous venons d'examiner pour l'interférence de deux rayons z_1 et z_2 identiques dont chacun se compose de 5 ondulations d'amplitude a_1, 6 ondulations d'amplitude a_2 et $5\frac{1}{2}$ d'amplitude a_3. Les deux rayons sont en retard l'un de l'autre de $1\frac{1}{4}$ onde.

Si pour l'expérience de Fresnel on emploie de la lumière préalablement colorée et polarisée, on peut immédiatement appliquer aux rayons amenés à interférer, les résultats de la page 77. L'accord parfait de ces résultats du calcul avec les apparences de l'expérience est évident. Au milieu d'une raie brillante, la différence de phases des rayons interférents est un nombre pair de demi-longueurs d'ondes, l'éclairement est plus intense que là où tombe la lumière réfléchie seulement par un des miroirs. La différence de phase augmente et en même temps l'éclat diminue si nous avançons vers la raie obscure la plus voisine en dehors, au milieu de laquelle, à savoir là où

la différence de phases a crû de $\frac{\lambda}{2}$, la destruction complète des deux rayons est indiquée par une obscurité absolue.

Employons-nous de la lumière ordinaire au lieu de lumière polarisée, nous pouvons, d'après la page 51, à la place d'un seul rayon de cette lumière en supposer deux d'égale intensité, polarisés rectilignement et à angle droit. Chacun offrira dès lors les mêmes phénomènes et l'on aura sur l'écran la même image qu'avec la lumière polarisée en ligne droite.

Du concours de deux ou plusieurs mouvements vibratoires à périodes inégales, il ne peut jamais résulter de repos; ceux-là se composent en un nouveau mouvement, tantôt plus intense, tantôt plus faible, qui n'a pas la forme simple des mouvements partiels, mais dans lequel se retrouvent toutes les périodes de ces derniers. L'œil reconnaît alors dans la couleur de la lumière résultante le mélange des couleurs des rayons composants. Ce mélange dépend, non-seulement de la qualité et du nombre des éléments qui y entrent, mais encore de leur intensité relative. La réunion de tous les rayons qui s'étalent dans le spectre solaire produit la lumière blanche. Si nous supprimons une de ces lumières en totalité ou en partie, nous ne trouvons dans le mélange que la lumière de la couleur complémentaire, et celle-ci est pure ou mélangée d'une certaine quantité de lumière blanche. Quant à la règle établie par Newton pour trouver la couleur du mélange d'un certain nombre de lumières de qualités diverses, nous renvoyons au *Traité de physique expérimentale* de Biot. Tome II, page 308, édition de 1824. Voyez aussi l'explication théorique de quelques phénomènes relatifs au mélange des couleurs du spectre, de J. Challis. *Ann. de Poggendorf* XXXVII.

B.

Les forces accélératrices de deux rayons polarisés qui suivent le même chemin, mais dont les plans de polarisation font entre eux un certain angle, donnent pour résultante, d'après le parallélogramme des forces, la force accélératrice du rayon résultant, et l'on voit facilement qu'à chaque instant l'écart, dans ce dernier, sera la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont les écarts des rayons composants. D'après cela, deux semblables rayons ne pourront jamais s'annuler, ce qui du reste a été démontré par une expérience de Fresnel et Arago (1). Nous nous bornons à indiquer ici ces recherches, car

(1) Herschel. *Traité de la lumière*, traduit par Verhulst et Quételet, § 946 et suiv.

elles exigent la connaissance des phénomènes de la diffraction; nous avons, au reste, un moyen plus à notre portée de vérifier les résultats que nous tirerons de l'explication mathématique de ce cas d'interférence. L'examen de cette question est surtout pour nous d'une grande importance parcequ'il nous conduit à une polarisation plus générale, la polarisation elliptique, dont celle en ligne droite découle comme cas particulier. Nous prouverons donc par l'expérience que cette polarisation existe réellement et qu'elle se produit dans les circonstances déterminées plus haut.

Supposons que la direction de la propagation de deux rayons polarisés en ligne droite, marchant ensemble, d'égales longueurs d'onde (car ce sont les seuls qu'on puisse facilement obtenir dans les expériences), se confonde avec la direction positive de l'axe des x d'un système de coordonnées dans l'espace, comptons les y et les z dans la direction des écarts de l'un et de l'autre rayon, ces écarts seront représentés par deux équations de la forme suivante :

$$S_1 \ldots 1)\ y = a \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + A),$$

$$S_2 \ldots 2)\ z = b \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + B),$$

et ces équations donnent les valeurs que possèdent pour un temps t, les coordonnées y et z d'une molécule atteinte à la fois par les deux mouvements et qui est distante de l'origine de la quantité x.

Les périodes des mouvements S_1 et S_2 étant égales, le nouveau mouvement résultant des deux aura la même période qu'eux, et après chacune d'elles chaque molécule d'éther sera revenue à sa première position. La trajectoire de la molécule d'éther est donc une ligne fermée, décrite pendant la durée d'une vibration des rayons S_1 et S_2. Les vibrations de S_1 et S_2 étant transversales, les trajectoires le seront évidemment aussi, et leurs plans passant par la position de repos de la molécule seront perpendiculaires à la direction de la propagation. L'état vibratoire qu'une molécule d'éther prendrait par suite du mouvement S_1 se propage avec la même vitesse que celui qui lui serait communiqué par le mouvement S_2 ; et le mouvement résultant se transporte aussi sans changer et avec la même vitesse à une molécule plus éloignée. Toutes les molécules décrivent ainsi des trajectoires égales et parallèles, et sur ces trajectoires les molécules passent en des points homologues d'autant plus tard qu'elles sont plus éloignées dans la direction des rayons. Mais quelle est la forme de cette trajectoire, quelles sont les lois suivant lesquelles elle est décrite ? Ce sont ces questions que nous allons résoudre.

Entre les équations 1) et 2) nous pouvons éliminer $vt - x$, et l'équation

que nous obtiendrons exprimera évidemment une relation entre y et z, laquelle aura lieu à chaque instant et dans toute l'étendue du rayon résultant. L'équation résultant de l'élimination représentera donc la trajectoire de toutes les molécules à chaque instant. Les équations 1) et 2) peuvent s'écrire :

$$1')\qquad \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + A) = \text{arc Sin.}\,\frac{y}{a},$$

$$2')\qquad \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + B) = \text{arc Sin.}\,\frac{z}{b},$$

retranchant, on aura :

$$\frac{2\pi}{\lambda}(A - B) = \text{arc Sin.}\,\frac{y}{a} - \text{arc Sin.}\,\frac{z}{b}.$$

Posons pour abréger :

$$\frac{2\pi}{\lambda}(A - B) = \alpha,\quad \text{arc Sin.}\,\frac{y}{a} = \eta,\quad \text{arc Sin.}\,\frac{z}{b} = \zeta,$$

nous tirons de la dernière équation :

$$\text{Sin.}\,(\alpha + \zeta) = \text{Sin.}\,\eta,\ \text{ou}$$

$$\text{Sin.}\,\alpha\sqrt{1 - \text{Sin.}^2\zeta} + \text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta = \text{Sin.}\,\eta,\ \text{ou}$$

$$\text{Sin.}^2\alpha\,(1 - \text{Sin.}^2\zeta) = \text{Sin.}^2\eta + \text{Cos.}^2\alpha.\,\text{Sin.}^2\zeta - 2\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\eta$$

$$\text{Sin.}^2\eta + \text{Sin.}^2\zeta - 2.\,\text{Cos.}\,\alpha\,\text{Sin.}\,\zeta\,\text{Sin.}\,\eta = \text{Sin.}^2\alpha,$$

équation que nous pouvons écrire en remettant pour η, ζ, α, les valeurs qu'ils représentent :

$$E\ldots\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 2\,\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(A - B).\frac{y\,z}{a\,b} = \text{Sin.}^2\,\frac{2\pi}{\lambda}(A - B).$$

La relation caractéristique $\left(\dfrac{\text{Cos.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(A - B)}{ab}\right)^2 - \dfrac{1}{a^2}.\dfrac{1}{b^2}$ étant plus petite que zéro, l'équation entre y et z représente en général une ellipse dont le centre est sur l'axe des x. Par conséquent, dans le rayon résultant, les molécules d'éther décrivent des ellipses égales, parallèles, dont les centres sont la position de repos des molécules et dont les plans sont perpendiculaires à la direction des rayons.

Nous disons d'après cela que le rayon provenant de l'interférence de S_1 et S_2 est *polarisé elliptiquement.*

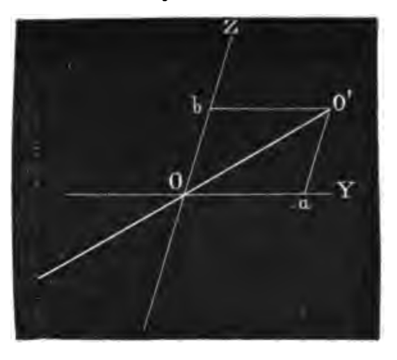
Les diverses trajectoires étant toutes égales et parallèles, peu importe celle que nous soumettrons à un examen plus approfondi. Nous choisirons celle de la molécule dont l'abscisse est A. Pour celle-là les équations de S_1 et S_2 se réduisent aux suivantes :

$$S_1 \ldots y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} vt.$$

$$S_2 \ldots z = b \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} [vt - (A - B)].$$

En outre nous supposerons, dans la figure 51, que O soit cette molécule, OY la direction des y positifs allant de gauche à droite, OZ celle des z positifs allant de bas en haut, et YOZ $= \varphi$ l'angle aigu que forment les plans d'oscillation des deux rayons; la direction de la propagation du rayon a lieu de l'espace situé derrière le plan de la figure vers celui qui est en avant.

Fig. 51.



1° Si A $=$ B, c'est-à-dire, si entre les rayons S_1 et S_2 il n'y a pas de différence de phase, et par conséquent si dans les courbes onduleuses des deux rayons les nœuds se confondent, nous aurons pour les deux rayons S_1 et S_2 et pour la trajectoire les équations suivantes :

$$S_1 \ldots y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} vt,$$

$$S_2 \ldots z = b \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} vt,$$

$$E \ldots \frac{y}{a} - \frac{z}{b} = 0.$$

La trajectoire est donc une ligne droite passant par la position de repos de la molécule, c'est-à-dire, par le point O, et dont la direction est la diagonale OO' du parallélogramme Oa O'b dont les côtés Oa et Ob sont égaux aux amplitudes a et b. En effet nous voyons d'après les équations de S_1 et S_2 que les écarts y et z croissant à partir de $t = o$ restent toujours dans le même rapport $\frac{a}{b}$, que par suite la molécule partant de O se déplace sur OO' vers le point O'. Elle arrive à ce dernier point quand $t = \frac{\delta}{4}$, parceque les écarts y et z ont alors leur valeur maximum positive. A partir de là la molécule revient sur elle-même, arrive en O quand les écarts y et z sont nuls au moment $\frac{\delta}{2}$ et s'é-

carte ensuite de la même manière, mais de l'autre côté : en un mot, elle oscille sur OO' de part et d'autre du point O, de la même manière que la molécule d'un rayon polarisé en ligne droite. Cela se montre encore plus clairement si nous calculons la valeur de son déplacement sur OO'. Représentons-le par r et comptons sa valeur positive dans le sens OO', alors pour chaque moment t, on a

$$r^2 = y^2 + z^2 + 2\,yz \text{ Cos. } \varphi$$

$$r^2 = (a^2 + b^2 + 2\,ab \text{ Cos. } \varphi) \text{ Sin.}^2 \frac{2\pi}{\lambda} vt \text{ ou}$$

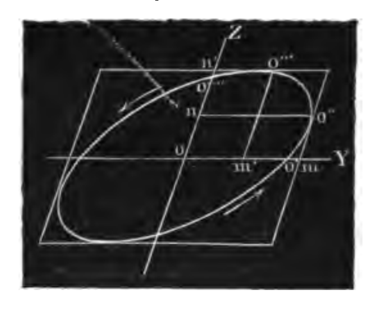
$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab \text{ Cos. } \varphi}. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} vt.$$

Cette équation a la même forme que celle de S_1 et de S_2. La durée du nouveau mouvement est évidemment égale à celle des mouvements composants ; la valeur de l'amplitude est $\sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab \text{ Cos. } \varphi}$. Puisque nous avons supposé que l'angle φ était aigu, l'amplitude atteint sa plus petite valeur, $\sqrt{a^2 + b^2}$, quand les deux rayons S_1 et S_2 ont leurs plans de polarisation perpendiculaires. L'amplitude croît en même temps que φ diminue, et atteint sa valeur maximum $a + b$, quand les deux plans de polarisation se confondent, cas que nous avons examiné tout au long sous la rubrique A.

2° Si A — B augmente, mais tout en ayant une valeur moindre que $\frac{\lambda}{4}$, la trajectoire est alors elliptique et s'écarte d'autant plus de la ligne droite que A — B est plus grand. Les écarts z ne commencent à être positifs qu'au temps $\frac{A - B}{v}$. A ce moment $z = 0$ tandis que y a déjà la valeur positive $a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(A - B)$. Soit OO' (fig. 52), cette valeur, O' est la position de la molécule à ce moment. A partir de là, les y et z positifs croissent en même temps. Les y atteignent leur maximum a, pour le temps $\frac{\delta}{4}$, et alors $z = b \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}[vt - (A - B)]$, valeur moindre que b. Soit $Om = a$ et On cette dernière valeur de z, O'' est la position de la molécule au bout du temps $\frac{\delta}{4}$. Les valeurs d'y décroissent tandis que celle de z croissent encore, d'où nous voyons que mO'' est tangente en O'' à la trajectoire. Les valeurs de z atteignent leur maximum b pour le temps $\frac{\delta}{4} + \frac{A - B}{v}$ lequel, puis-

que $A - B < \frac{\lambda}{4}$ tombe entre $\frac{\delta}{4}$ et $\frac{\delta}{2}$. A ce moment là $y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}$ $[vt - (A - B)]$ valeur comprise entre a et 0, soit $m'O$ cette valeur et $On' = b$, O''' sera la position de la molécule à ce moment. Les écarts z devenant plus petits, tandis que y continue à décroître, $n'O'''$ est tangent à la trajectoire en O'''. Les écarts y commenceront enfin à être négatifs après le temps $t = \frac{\delta}{2}$, à ce moment la molécule se trouve sur OZ et sa distance au point O, $z = b \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} [vt - (A - B)]$ est comprise entre b et 0 : soit OO''''. Décrivons maintenant une ellipse par les points O', O'', O''', O'''' et tangente aux lignes droites mO'' et $n'O'''$ en O'' et en O''', ce sera la trajectoire de la molécule, la ligne représentée par l'équation E. Nous voyons d'après cette discussion que la molécule parcourt sa trajectoire dans un sens qui est opposé au mouvement des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire, de droite à gauche.

Fig. 52.



Les forces accélératrices mises en jeu étant ici des forces centrales, c'est-à-dire, dont les directions passent toujours par un point fixe (le point de repos de la molécule), le rayon vecteur de la molécule oscillante, la ligne qui joint chacune de ses positions à celle du repos, décrit dans des temps égaux des secteurs elliptiques égaux.

3° Si la différence des phases devient égale à $\frac{\lambda}{4}$, les équations des rayons S_1 et S_2 et celle de la trajectoire seront :

$$S_1 \ldots y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} vt, \quad S_2 \ldots z = -b \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda} vt,$$

$$E \ldots \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

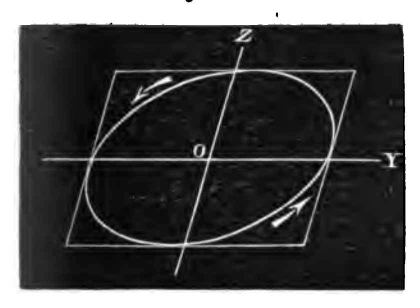
Les directions des vibrations OY et OZ (fig. 53), seront, comme le fait voir la dernière équation, des diamètres conjugués de la trajectoire, et les longueurs de ces diamètres seront doubles des amplitudes.

Le sens du mouvement reste le même que dans le cas précédent, c'est-à-dire, vers la gauche.

Dans le cas particulier où les plans de polarisation sont perpendiculaires

entre eux, les axes de la trajectoire se confondent avec les directions des vibrations et les demi-axes sont égaux aux amplitudes. Nous voyons d'après cela que *chaque vibration elliptique sinistrorsum peut être regardée comme la résultante de deux vibrations rectilignes, dont les directions et les amplitudes se confondent avec les directions et les grandeurs des demi-axes de la trajectoire, et dont le rapport des phases est donné par des équations de la forme S_1 et S_2.* Si non-seulement les plans de polarisation sont perpendiculaires entre eux,

Fig. 53.



mais si les deux rayons composants ont la même intensité, la trajectoire se transforme en un cercle que la molécule décrit en allant vers la gauche, avec une vitesse constante pendant la durée d'une oscillation. Un rayon dans lequel s'exécutent de pareilles vibrations circulaires, s'appelle un rayon *polarisé circulairement vers la gauche.*

4° Pendant que la différence des phases partant de $\frac{\lambda}{4}$ s'approche de la valeur $\frac{\lambda}{2}$, la trajectoire elliptique se resserre, sans que pour cela le sens du mouvement change. Quand enfin $A - B = \frac{\lambda}{2}$, c'est-à-dire, quand un des rayons est en avance sur l'autre d'une demi-longueur d'onde, nous avons pour les rayons et la trajectoire, les équations :

$$S_1 \ldots y = a \,\text{Sin.}\, \frac{2\,\pi}{\lambda}\, vt, \quad S_2 \ldots z = -\, b \,\text{Sin.}\, \frac{2\,\pi}{\lambda}\, vt,$$

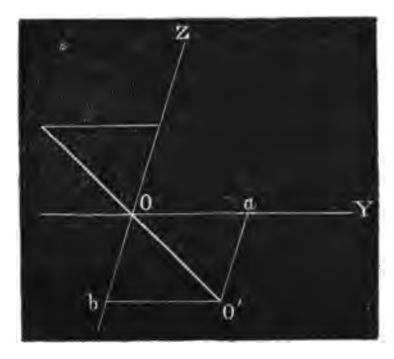
$$E \ldots \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0.$$

Faisons $Oa = a$ et $Ob = b$ (fig. 54), la diagonale OO' dans le parallélogramme $OaO'b$ sera la ligne droite en laquelle se change la trajectoire elliptique, et, comme dans le cas 1°, OO' est l'amplitude de la vibration rectiligne résultante. Nous lui trouvons pour équation une expression analogue à celle du cas 1°

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab \,\text{Cos.}\, \varphi}.\, \text{Sin.}\, \frac{2\,\pi}{\lambda}\, vt.$$

Le minimum de l'amplitude qui est atteint quand les plans de polarisation se confondent, est $= a - b$, différence des amplitudes composantes : si ces plans sont perpendiculaires entre eux, l'amplitude atteint son maximum $\sqrt{a^2 + b^2}$ comme dans le cas 1° pour la même position des plans de polarisation, puisque dans ces deux cas il n'y a de différence que dans la direction des vibrations.

Fig. 54.



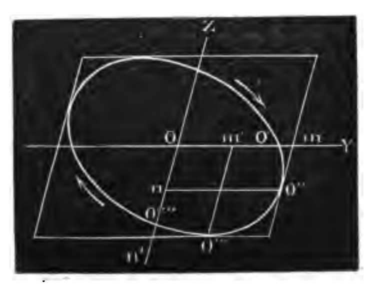
5° Si la différence des phases dépasse la valeur $\frac{\lambda}{2}$, le sens de la rotation change en même temps que la trajectoire redevient une ellipse. L'oscillation rectiligne forme une transition dans laquelle il ne peut être question de rotation. Dans ce cas les équations des rayons deviennent :

$$S_1 \ldots y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} vt,$$

$$S_2 \ldots z = - b \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} [vt - (A - B)],$$

et si nous cherchons les positions successives de la molécule, correspondantes aux temps croissants $\frac{A-B}{v}, \frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4} + \frac{A-B}{v}$, et $\frac{\delta}{2}$, nous trouverons les points O', O'', O''', O'''' (fig. 55), d'où nous voyons que la rotation est dirigée vers la droite ; les vibrations se font de gauche à droite, et un rayon provenant de pareilles vibrations s'appelle un *rayon polarisé elliptiquement vers la droite*. La différence des phases croissant, la trajectoire s'élargit toujours davantage et quand cette différence atteint $\frac{3}{4}\lambda$ nos équations primitives se transforment en les suivantes :

Fig. 55.



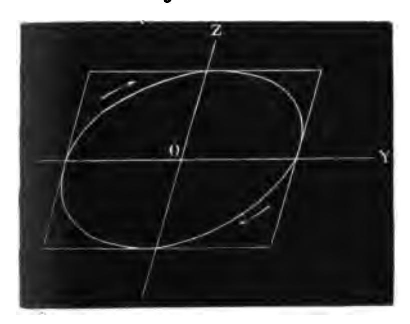
$$S_1 \ldots y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} vt,$$

$$S_2 \ldots z = b \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda} vt,$$

$$E = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

La trajectoire est alors la même que dans le second cas, mais la molécule tourne vers la droite (fig. 56). Nous concluons donc encore que *tout rayon polarisé elliptiquement à droite, peut être considéré comme provenant de deux rayons polarisés en ligne droite, dont les directions des vibrations sont parallèles aux axes de la trajectoire du premier, dont les amplitudes sont égales aux demi-axes de cette trajectoire, et qui sont en retard l'un sur l'autre de* $\frac{3}{4}\lambda$.

Fig. 56.



Si en outre les amplitudes des rayons composants sont égales, la trajectoire de la molécule devient un cercle dont le rayon est égal à cette amplitude, et nous disons que le rayon est *polarisé circulairement à droite*. Si la différence des phases dépasse $\frac{3}{4}\lambda$, l'ellipse, sans que le sens de la rotation change, se rapproche de la ligne droite, en laquelle la trajectoire se transforme enfin si la différence des phases atteint une longueur d'onde, et alors les rayons se comportent comme si leurs phases étaient égales.

D'après ce qui précède, la lumière polarisée elliptiquement s'offre à nous comme l'espèce de lumière la plus générale pouvant résulter de l'interférence de deux rayons de même couleur polarisés en ligne droite; l'expression mathématique de ce mouvement est donnée par la combinaison des deux équations représentant les rayons composants. Nous avons examiné les lois de chacune de ces vibrations en particulier, mais il nous reste à déterminer la forme de la ligne d'onde. Ici encore, comme dans la lumière polarisée en ligne droite, la ligne d'onde se composera, de longueur d'onde en longueur d'onde, d'ondulations de même forme, de sorte que pour la connaître nous n'avons qu'à rechercher ce qui est relatif à une étendue d'une longueur d'onde. Soient donc a_1, a_2..... (fig. 57), les positions de repos des molécules d'éther qui seront mises en mouvement par un rayon polarisé elliptiquement; supposons que la distance de deux de ces points consécutifs soit égale à $\frac{1}{8}$ de longueur d'onde. Les ellipses E_1, E_2..... représentent les trajectoires des molécules; leurs centres sont en a_1, a_2....., leurs plans sont perpendiculaires au rayon SS'. Admettons que les grands axes parallèles soient verticaux et représentés par les lignes A_1A_1, A_2A_2..... Dès lors les petits axes B_1B_1, B_2B_2..... sont horizontaux. Toutes les molécules du rayon se trouvent évidemment sur un

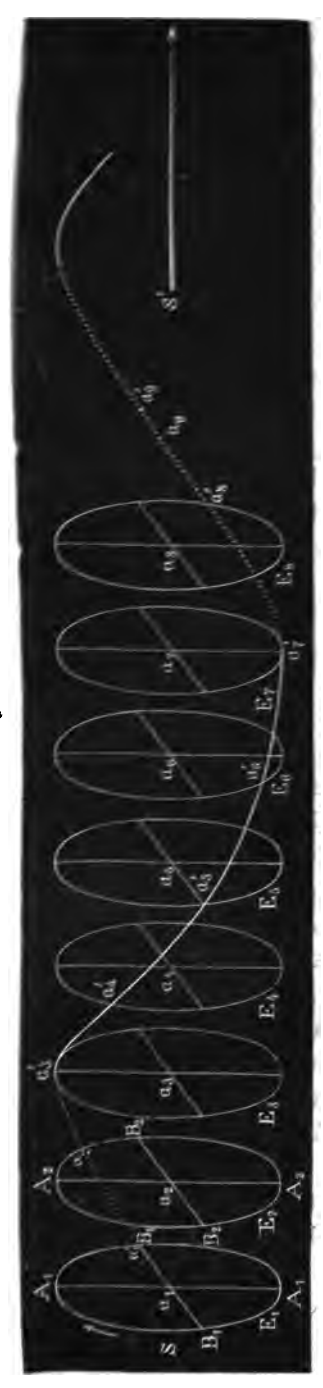


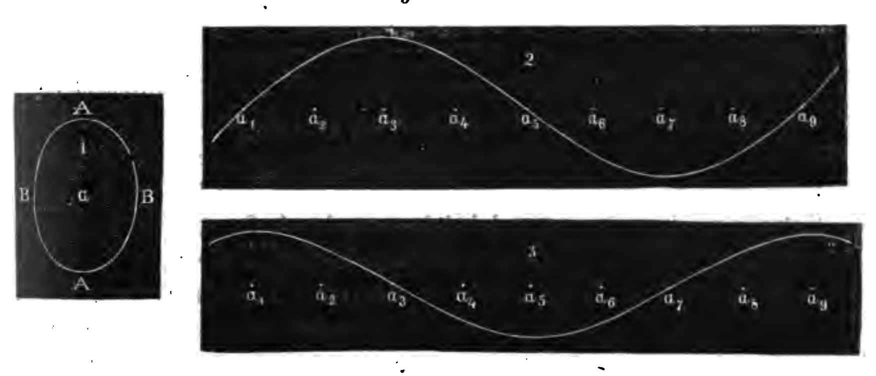
Fig. 57

cylindre elliptique tangent aux trajectoires E_1E_2....., l'axe du cylindre est SS', sa première section principale est verticale, sa seconde est horizontale. Quelle est maintenant la position des molécules d'éther si le rayon tourne un peu vers la droite en même temps qu'il s'avance de S vers S', et cela, pour préciser les idées, au moment où la première molécule repasse par derrière sous la section principale horizontale ?

La molécule a_1 se trouve à l'extrémité postérieure du petit axe B_1B_1 en a'_1 et est sur le point de passer sous le plan horizontal. La molécule a_2 qui est éloignée de a_1 de $\frac{\lambda}{8}$ ne se trouve dans la position de la dernière qu'après le temps $\frac{\delta}{8}$ et doit par conséquent pour arriver en B_2 décrire un secteur qui est la huitième partie de la surface elliptique de la trajectoire (voyez page 86), Si donc, secteur $a'_2a_2B_2 = \frac{1}{2}$ quadrant $A_2a_2B_2$, a'_2 est le lieu de la molécule a_2. La molécule a_3 pour arriver en B_3 doit encore décrire un quart de sa trajectoire : elle se trouve donc à l'extrémité supérieure de l'axe vertical de sa trajectoire en a'_3. Par des raisonnements analogues, nous voyons que a'_4, a'_5,...., sont les positions des molécules a_4, a_5..... Si nous considérons une molécule quelconque a_n entre a_1 et a_9, il est évident que le secteur a_nB_n que son rayon vecteur doit décrire encore pour arriver à l'extrémité postérieure du demi-axe, est proportionnel à sa distance au plan E_1. Joignons les positions des molécules par une ligne courbe, nous obtiendrons la trace $a'_1a'_2.....a'_9$ d'une spirale décrite sur le

cylindre dont nous avons parlé. Cette spirale commence à la partie postérieure de la section principale horizontale en a'_1, atteint la partie supérieure de la section verticale en a'_3, redescend en avant jusqu'en a'_5 ; là commence la seconde moitié de la spirale, qui en a'_7 atteint l'extrémité inférieure de la section verticale pour se terminer en a'_9 à une molécule placée de la même manière que a'_1. Les deux moitiés de la spirale peuvent se superposer. Sa hauteur est égale à une longueur d'onde. En a'_1 et a'_9 passent de nouvelles spirales qui sont égales à la première, après celles-là en viennent d'autres et ainsi de suite. La ligne d'onde est d'après cela une hélice elliptique tournant vers la droite. Si nous déplaçons la ligne d'onde dans la direction et avec la vitesse de propagation de la lumière, elle reste toujours le lieu des molécules d'éther et sa section, par une des trajectoires E_1....., donne toujours la position de la molécule correspondante. Dans la figure 58, 1 est la projection

Fig. 58.



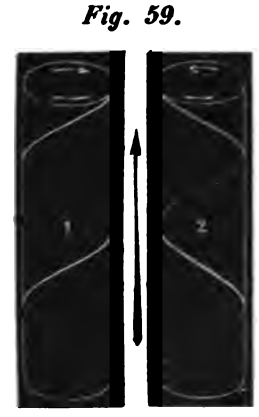
de la ligne d'onde sur le plan de la trajectoire de la vibration, c'est une ellipse égale à cette trajectoire. La projection 2 sur la section principale verticale, est une ligne sinueuse dont l'axe se confond avec le rayon, et dont l'amplitude est égale au demi-grand axe de la trajectoire. Enfin la projection 3 sur la section horizontale est également une ligne sinueuse, qui diffère de la première en ce qu'elle est en arrière de celle-ci d'un quart de longueur d'onde, et en ce que son amplitude est égale au demi-petit axe de la trajectoire.

La ligne d'onde du rayon tournant à gauche, ne diffère de celle du rayon tournant à droite qu'en ce que la première est une hélice tournant vers la gauche, quand la dernière tourne vers la droite.

Si la polarisation elliptique se transforme en polarisation circulaire, à la place du cylindre elliptique on a un cylindre de révolution et l'hélice devient une hélice ordinaire.

Dans la figure 59, 1 et 2 représentent les lignes d'onde d'un rayon lumineux polarisé circulairement, l'un à droite, l'autre à gauche. La direction de la propagation de la lumière et le sens de la rotation sont indiqués par les flèches. Quant à la place que les molécules d'éther du rayon occupent aux différents moments, nous l'obtenons ici non-seulement en déplaçant la courbe sinueuse, sans la faire tourner, dans la direction de la propagation du mouvement et avec sa vitesse, mais encore en faisant tourner la ligne sinueuse, sans la déplacer par glissement, dans le sens de la rotation du rayon et autour de ce dernier avec une vitesse angulaire égale à celle de la molécule dans son mouvement de rotation.

Fig. 59.



C.

Dans les paragraphes A et B, nous avons trouvé le rayon provenant de l'interférence de deux rayons donnés, polarisés en ligne droite ; il nous est maintenant aussi facile, en suivant une marche inverse, de décomposer un rayon donné en deux autres, c'est-à-dire, de déterminer deux rayons par l'interférence desquels on reproduirait le rayon donné. On comprendra alors qu'il soit permis, si on le désire, de mettre les deux derniers à la place du premier ; cette substitution peut avoir une grande importance. On pourra évidemment disposer de plusieurs attributs des rayons composants, d'une manière analogue à ce que l'on fait dans la composition des forces et dans des limites faciles à comprendre. Nous allons donner des exemples des cas les plus importants d'une pareille décomposition.

1° Etant donné un rayon polarisé en ligne droite, le decomposer en deux autres polarisés dans le même plan, qui, abstraction faite de la position, sont égaux entre eux et dont l'un devance le rayon donné, d'autant que l'autre est en arrière sur celui-ci.

Un rayon d'une durée d'oscillation déterminée ne pouvant résulter que de rayons ayant la même durée d'oscillation, et une durée d'oscillation déterminée correspondant dans le même milieu à une vitesse et à une longueur d'onde déterminées, ces deux dernières grandeurs devront avoir dans les rayons cherchés la même valeur que dans le rayon donné. Si donc on représente par V l'expression $\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + A)$, l'équation du rayon donné étant

$$y = a \text{ Sin. } V,$$

les équations des rayons cherchés S_1 et S_2, seront de la forme

$$y_1 = a_1 \text{ Sin. } (V + \rho_1), \quad y_2 = a_2 \text{ Sin. } (V + \rho_2).$$

L'intensité des rayons cherchés doit être la même, on a donc $a_2 = \pm a_1$. En outre un des rayons doit être en avant sur le rayon donné, d'autant que l'autre est en retard, cela veut dire que la différence de phases entre le rayon donné et un des deux rayons cherchés doit être égale en valeur absolue à la différence de phases entre le rayon donné et l'autre, mais seulement les signes seront contraires. On aura donc $\rho_2 = -\rho_1$, et les équations des rayons S_1 et S_2 deviennent :

$$y_1 = a_1 \text{ Sin. } (V + \rho_1), \quad y_2 = \pm a_1 \text{ Sin. } (V - \rho_1).$$

Ces rayons se composent en un dont l'équation est la suivante :

$$y = (a_1 \text{ Cos. } \rho_1 \pm a_1 \text{ Cos. } \rho_1) \text{ Sin. } V + (a_1 \text{ Sin. } \rho_1 \mp a_1 \text{ Sin. } \rho_1) \text{ Cos. } V.$$

Et ce dernier rayon doit être identique à S, ce qui exige d'abord que le coefficient de Cos. V s'évanouisse ; cela n'aura lieu, puisque ρ_1 doit être différent de zéro, qu'autant que $a_2 = + a_1$. Cela admis, il faut en second lieu que le coefficient de Sin. V ait la valeur a. Nous avons donc :

$$2\, a_1 \text{ Cos. } \rho_1 = a.$$

Nous pouvons encore disposer des deux quantités a_1 et ρ_1 toutefois avec la restriction pour la première que $2\, a_1 \geqq a$. Prenons en particulier $\rho_1 = \frac{1}{4}\pi$, alors $a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et les rayons S_1 et S_2 seront représentés par les équations :

$$y_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ Sin. } (V + \tfrac{1}{4}\pi), \quad y_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ Sin. } (V - \tfrac{1}{4}\pi).$$

2° Etant donné un rayon S polarisé en ligne droite, le transformer en deux autres S_1 et S_2 produisant le même effet que le premier, mais dont l'un S_1 oscille dans un plan faisant un angle φ avec le plan des vibrations du rayon S, tandis que le plan des oscillations du second rayon S_2 est perpendiculaire sur celui du premier.

D'après les mêmes considérations que précédemment, la vitesse de propagation et la longueur d'onde des rayons cherchés doivent être égales à celles du rayon donné. Les nœuds des rayons cherchés doivent se confondre, sans quoi, d'après le § B, leur rayon résultant ne serait pas polarisé en ligne droite, mais bien elliptiquement. En outre ces nœuds doivent aussi se confondre avec ceux du rayon donné, attendu que la résultante de S_1 et de S_2 ne doit pas différer de phase avec S. Soit donc S représenté par l'équation

$$y = a \text{ Sin. V},$$

les équations des rayons cherchés seront de la forme :

$$y_1 = a_1 \text{ Sin. V} \quad \text{et } y_2 = a_2 \text{ Sin. V}.$$

Ces deux rayons se composent en un nouveau dont l'amplitude est $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ et dont le plan d'oscillation fait avec celui du rayon S. un angle φ pour lequel on a

$$\text{Sin. } \varphi = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \qquad \text{Cos. } \varphi = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$ Voyez § B, n° 1.

Maintenant ce rayon doit être identique au rayon donné, alors a_1 et a_2 doivent être déterminés de manière qu'on ait :

$$a_1^2 + a_2^2 = a^2$$

et par conséquent aussi :

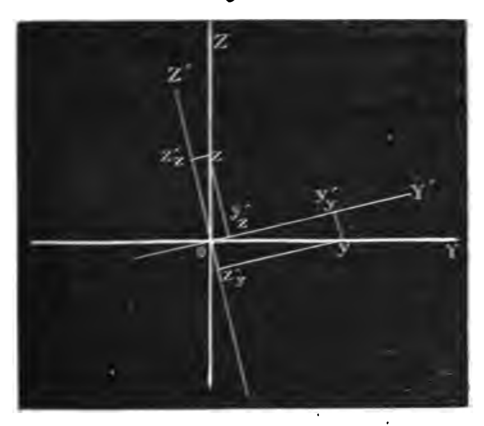
$$\text{Sin. } \varphi = \frac{a_2}{a} \qquad \text{Cos. } \varphi = \frac{a_1}{a}.$$

Les équations des rayons cherchés sont alors :

$$y_1 = a \text{ Cos. } \varphi. \text{ Sin. V}, \qquad y_2 = a \text{ Sin. } \varphi. \text{ Sin. V}.$$

3° Un rayon polarisé elliptiquement étant donné, on demande de le remplacer à chaque instant par deux rayons polarisés en ligne droite dont les plans d'oscillation se confondent avec deux plans donnés perpendiculaires entre eux.

Fig. 60.



En supposant que le rayon donné se meut vers l'œil du lecteur, soient OZ et OY les directions des axes de la trajectoire elliptique. A la place du rayon polarisé elliptiquement, qui arrive en O, il est permis, d'après le § B, n° 3 et 4, de supposer deux rayons polarisés en ligne droite, dont les écarts sont dirigés suivant OY et OZ, dont les amplitudes sont égales aux demi-axes de la trajectoire elliptique, et qui sont en retard l'un par rapport à l'autre de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$ de leur longueur d'onde, laquelle est la même que celle du rayon donné. Les équations de ces rayons Y et Z seraient :

$$y = a \text{ Sin. V}, \qquad z = b \text{ Cos. V},$$

dans lesquelles a tout aussi bien que b peut être positif ou négatif. Si maintenant OY′ et OZ′ sont les directions d'oscillation données, dont la première fait avec OY l'angle φ, nous pouvons d'après 2) décomposer le rayon Y en deux autres Y'_y et Z'_y dont les écarts positifs se confondent avec OY′ et OZ′. Leurs équations sont :

$$y' = a \text{ Cos. } \varphi. \text{ Sin. V}, \qquad z' = - a \text{ Sin. } \varphi. \text{ Sin. V}.$$

De la même manière décomposons le rayon Z en deux, Y'_z et Z'_z dont les équations sont :

$$y' = b \text{ Sin. } \varphi. \text{ Cos. V}, \qquad z' = b \text{ Cos. } \varphi. \text{ Cos. V}.$$

Les quatre rayons élémentaires ainsi obtenus, ont deux à deux un seul et même plan d'oscillation. Les rayons Y'_y et Y'_z, dont la direction de l'oscillation est OY′, se composent en un rayon Y′ polarisé de la même manière, dont l'équation est :

$$y' = a \text{ Cos. } \varphi. \text{ Sin. V} + b \text{ Sin. } \varphi. \text{ Cos. V},$$

ou bien si nous déterminons c et ψ de telle manière qu'on ait :

$$c \text{ Cos. } \psi = a \text{ Cos. } \varphi, \qquad c \text{ Sin. } \psi = b \text{ Sin. } \varphi,$$

$$y' = c \text{ Sin. } (\text{V} + \psi).$$

De même les deux rayons Z'_y et Z'_z, donnent le nouveau rayon Z′, dont l'équation est :

$$z' = - a \text{ Sin. } \varphi. \text{ Sin. V} + b \text{ Cos. } \varphi. \text{ Cos. V}.$$

ou bien si d et χ sont choisis de manière que d Cos. $\chi = - a$ Sin. φ, et d Sin. $\chi = b$ Cos. φ,

$$z' = d \text{ Sin. } (\text{V} + \chi).$$

4° Démontrer qu'à la place d'un rayon polarisé en ligne droite, on peut, sans qu'il y ait changement dans l'effet produit, prendre deux rayons polarisés circulairement, dont l'un tourne à droite et l'autre à gauche.

Soit l'équation du rayon donné :

$$r = a \text{ Sin. V}.$$

Nous le décomposons en deux rayons polarisés en ligne droite Y et Z, dont les directions des vibrations font un angle de 45° avec celle du rayon donné et par conséquent sont perpendiculaires entre elles. Les équations de ces rayons sont d'après 2).

$$y = a \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ Sin. V}. \qquad z = a \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ Sin. V}.$$

Nous décomposons ensuite chacun de ces rayons, suivant 1), en deux rayons d'égale intensité dont les uns, savoir y_1 et z_1, sont en avance de $\frac{1}{8}$ de longueur d'onde sur y et z, et les autres, y_2 et z_2, en retard sur les mêmes de la même quantité. L'équation de y_1 sera de la forme :

$$y_1 = a_1 \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + \tfrac{1}{8}\lambda) = a_1 \text{ Sin. } (V + \tfrac{1}{4}\pi),$$

celle de y_2 :

$$y_2 = a_2 \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x - \tfrac{1}{8}\lambda) = a_2 \text{ Sin. } (V - \tfrac{1}{4}\pi),$$

et nous voyons qu'en employant la formule 1), ρ_1 doit être pris $= \frac{1}{4}\pi$. D'après cela nous avons :

$$y_1 = \frac{a}{2} \text{ Sin. } (V + \tfrac{1}{4}\pi), \qquad y_2 = \frac{a}{2} \text{ Sin. } (V - \tfrac{1}{4}\pi),$$

$$z_1 = \frac{a}{2} \text{ Sin. } (V + \tfrac{1}{4}\pi), \qquad z_2 = \frac{a}{2} \text{ Sin. } (V - \tfrac{1}{4}\pi),$$

ou bien si nous posons $V + \frac{1}{4}\pi = V'$:

$$y_1 = \frac{a}{2} \text{ Sin. } V', \qquad y_2 = \frac{a}{2} \text{ Cos. } V'$$

$$z_1 = \frac{a}{2} \text{ Sin. } V', \qquad z_2 = \frac{a}{2} \text{ Cos. } V'.$$

A la place du couple de rayons y_1 et z_2 d'une part, et du couple z_1 et y_2 d'autre part, il nous est permis, d'après B n°s 3 et 4, de prendre des rayons polarisés circulairement dont les sens de rotation sont opposés, et dont les trajectoires qui se confondent ont pour rayon $\frac{a}{2}$.

Cette dernière décomposition d'un rayon polarisé en ligne droite, trouve son application dans la théorie de la polarisation circulaire par double réfraction dans un milieu isotrope, laquelle ne peut trouver place dans cet ouvrage.

Le problème général de l'interférence des rayons lumineux suivant la même route, quels que soient leur nombre et leur polarisation, peut se résoudre facilement d'après ce qui précède. Comme dans les questions analogues de statique, on mènera deux plans perpendiculaires, choisis à volonté, passant par l'axe commun des rayons donnés, et on décomposera chacun de ces derniers en deux rayons polarisés en ligne droite, l'un oscillant dans un des plans, l'autre dans l'autre. Ensuite on réunira chacun des deux groupes de rayons ainsi obtenus, en un seul rayon, en cherchant d'abord la résultante de deux rayons, puis la résultante de celle-ci avec un troisième, et ainsi de suite. On aura enfin le rayon provenant des résultantes des deux groupes dont les vibrations sont perpendiculaires. Ce dernier sera le plus souvent polarisé elliptiquement et de la même couleur que les autres, quand les rayons composants ont la même longueur d'onde (le seul cas où les opérations analytiques exposées plus haut peuvent facilement s'appliquer). *Par l'interférence de la lumière homogène on ne peut donc jamais obtenir une nouvelle couleur*, ce qui du reste est aussi prouvé par l'expérience.

CHAPITRE VII.

Phénomènes produits par la lumière polarisée elliptiquement.

Pour pouvoir confirmer les résultats théoriques du chapitre précédent sur les phénomènes que présentent les rayons lumineux dans lesquels les trajectoires des vibrations sont elliptiques, nous devons chercher à obtenir deux faisceaux de rayons parallèles polarisés en ligne droite, dont les plans de polarisation font un angle déterminé et pouvant être retardés l'un par rapport à l'autre d'une quantité arbitraire. Au moyen du *compensateur* de M. Babinet on réalise ces conditions. Les remarques suivantes sont nécessaires pour bien comprendre cet instrument.

Dans les figures 61 et 62, P représente un prisme taillé dans un cristal

Fig. 61.



Fig. 62.

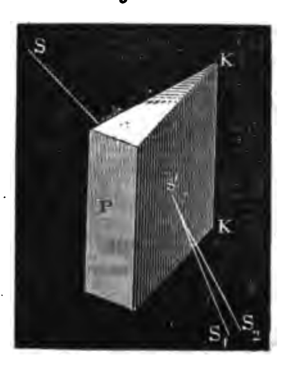


Fig. 63.



transparent de quartz, de manière que son arête de réfringence K soit parallèle à l'axe du prisme à 6 faces, forme qu'affectent les cristaux de ce minéral (fig. 63). Si l'on fait arriver perpendiculairement sur une face du prisme, en f par exemple, un mince faisceau de rayons parallèles, monochromatiques, et de lumière ordinaire, ce faisceau après avoir traversé le cristal de s en s' se partage en pénétrant de nouveau dans l'air en s', en deux faisceaux divergents de rayons parallèles, $s'S_1$ et $s'S_2$ qui sont tout

deux perpendiculaires à l'arête K. Quant à l'éclat des deux rayons, l'œil ne peut distinguer aucune différence. Examinés au moyen du spath calcaire, les deux faisceaux se montrent polarisés rectilignement, et de telle manière que la direction des vibrations du faisceau $s'S_2$ le moins dévié de la direction primitive est perpendiculaire à l'arête réfringente K et par conséquent aussi à l'axe principal du cristal, tandis que les vibrations du rayon $s'S_1$, le plus dévié sont parallèles à cette direction. Si l'on polarise la lumière incidente au moyen d'un spath calcaire, le faisceau S_1 apparaît seul, ou le faisceau S_2 seul, suivant que le plan de polarisation de la lumière incidente est perpendiculaire ou parallèle à K. Pour toute autre position de ce plan les deux faisceaux émergents existent : leur éclat est égal, si le plan est incliné de 45° sur l'axe du cristal. Si l'angle d'inclinaison augmente, l'éclat de S_1 augmente tandis que celui de S_2 diminue ; si l'angle diminue c'est au contraire S_2 qui est plus brillant et S_1 moins lumineux.

L'indice de réfraction des rayons S_1 et S_2 ne change pas, quel que soit l'angle réfringent du prisme, et quelle que soit aussi dans le cristal la direction ss' perpendiculaire à l'axe ; les deux rayons ci-dessus, suivent les lois de la réfraction telles qu'elles se présentent pour les milieux isotropes. Malus, qui découvrit la polarisation, détermina l'indice de réfraction des deux rayons pour la lumière de réfrangibilité moyenne ; il trouva pour le rayon S_1 le nombre $\varepsilon = 1{,}55817$ et pour le rayon S_2 le nombre $\omega =$ 1,54843. Pour la lumière d'une autre réfrangibilité, les valeurs de ω et ε changent ; toutes deux sont plus grandes pour le violet, plus petites pour le rouge.

De tout cela nous concluons que dans un cristal de quartz, il ne se propage dans une direction perpendiculaire à son axe cristallographique que des rayons polarisés en ligne droite. Le plan de polarisation des uns est parallèle à l'axe, et leur vitesse dans le cristal est $\frac{v}{\omega}$, si v représente la vitesse de propagation de la lumière dans l'air : ces rayons forment le faisceau S_2. Le plan de polarisation des autres est perpendiculaire à l'axe, et ils se propagent avec la vitesse $\frac{v}{\varepsilon}$; c'est d'eux que provient le faisceau S_1. On peut se rendre un compte exact de ces phénomènes. Par le point s de la face f comme origine O d'un système de coordonnées dans l'espace, menons le côté positif de l'axe des y de gauche à droite, en supposant l'œil placé derrière la face f' et la direction positive de l'axe des z de bas en haut, enfin comptons les x positifs dans la direction Ss de la propagation de la lumière. La direction des vibra-

tions du rayon Ss polarisé en ligne droite, étant supposée faire avec OY l'angle α, l'équation de ce rayon sera, en représentant par r l'écart

$$r = A \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

forme à laquelle on pourra toujours la ramener en choisissant convenablement l'origine du temps.

Par suite de ce que nous avons vu page 93, nous pouvons à la place de ce rayon, prendre deux rayons composants dont les directions des vibrations seraient OZ et OY, ayant des phases égales à celle du rayon primitif, et dont les amplitudes auraient pour valeurs A Cos α et A Sin α. Les équations de ces rayons sont :

$$y = A \text{ Cos. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad z = A \text{ Sin. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x).$$

Le premier rayon se propage dans l'intérieur du cristal par des vibrations perpendiculaires à l'axe du cristal, et sort de f' suivant S_2, tandis que le second se propage suivant S_1.

L'amplitude du premier rayon composant diminue évidemment depuis la valeur maximum jusqu'à zéro, quand l'angle α augmente, tandis que l'amplitude du second rayon composant suit la marche inverse; l'intensité augmentant aussi ou diminuant avec l'amplitude, les phénomènes décrits plus haut se trouvent expliqués.

Les vitesses des rayons composants y et z étant différentes, nous devons admettre une différence dans les modifications que leurs amplitudes éprouvent à leur entrée et à leur sortie du cristal. La différence qu'on peut d'après cela supposer dans le changement des rayons S_1 et S_2 est toutefois très-faible dans chaque cas, puisque si $\alpha = 45°$, S_1 et S_2 apparaissent également brillants. Nous admettrons que l'amplitude des vibrations parallèles à l'axe principal cristallographique soit tellement affaiblie que leur grandeur, après leur sortie dans l'air, soit à leur grandeur primitive comme μ est à 1. La constante μ, peut s'appeler *coëfficient d'affaiblissement*. Le même coëfficient prend la valeur μ_2 pour la vibration perpendiculaire à l'axe KK. Les amplitudes primitives A Cos. α et A Sin. α, des rayons composants y et z se changent donc, quand la lumière a traversé le cristal, en μ_2 A Cos. α et μ_1 A Sin. α. Si maintenant les rayons composants se propageaient dans le cristal de s en s_1 avec la même vitesse que dans l'air, et ne subissaient aucun changement dans leur phase, les équations des rayons S_1 et S_2 en les supposant dans la direction de l'axe des x, et en comptant les abscisses à partir de s_1, seraient :

$$y = \mu_2 \text{ A Cos. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x - ss')$$

$$z = \mu_1 \text{ A Sin. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x - ss').$$

Mais premièrement nous devons laisser indécis, si au passage d'un milieu dans un autre la phase ne change pas. Si c'est là ce qui arrive, les équations des deux rayons S_1 et S_2 doivent au moyen des grandeurs indéterminées φ_1 et φ_2 être représentées par :

$$y = \mu_2 \text{ A Cos. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x - ss' + \varphi_2)$$

$$z = \mu_1 \text{ A Sin. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x - ss' + \varphi_1).$$

En second lieu, le chemin ss' sera parcouru avec une vitesse autre que dans l'air. Les vibrations y, dont la vitesse de propagation dans le cristal est $\frac{v}{\omega}$, devraient, pendant que dans le cristal elles parcourent le chemin ss', parcourir dans l'air la longueur $\omega.\, ss'$, de même que les vibrations z parcourraient dans l'air le chemin $\varepsilon.\, ss'$, puisque leur vitesse dans le cristal est $\frac{v}{\varepsilon}$. Les rayons se comportent donc comme s'ils avaient parcouru dans l'air, au lieu de ss', les longueurs $\omega.\, ss'$ et $\varepsilon.\, ss'$. Leurs équations sont d'après cela :

$$y = \mu_2 \text{ A Cos. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x - \omega.\, ss' + \varphi_2).$$

$$z = \mu_1 \text{ A Sin. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x - \varepsilon.\, ss' + \varphi_1).$$

Si l'on représente les longueurs d'ondes dans le cristal par λ_1 et λ_2, on aura :

$$\omega = \frac{\lambda}{\lambda_2} \text{ et } \varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

et alors en appelant D l'épaisseur ss', les équations des rayons pourront s'écrire de la manière suivante :

$$y = \mu_2 \text{ A Cos. } \alpha. \text{ Sin. } 2\pi \left(\frac{vt - x + \varphi_2}{\lambda} - \frac{D}{\lambda_2}\right)$$

$$z = \mu_1 \text{ A Sin. } \alpha. \text{ Sin. } 2\pi \left(\frac{vt - x + \varphi_1}{\lambda} - \frac{D}{\lambda_1}\right).$$

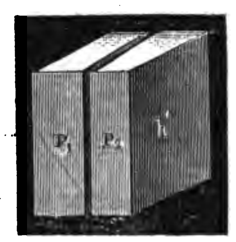
Si nous prenons dans le prisme P, l'angle réfringent suffisamment petit, les deux faisceaux S_1 et S_2 se rapprocheront du parallélisme. En mastiquant sur ce prisme un second prisme de verre, de manière à compléter le parallé-

lépipède, nous pourrons encore diminuer davantage la divergence de S_1 et S_2, au point qu'on pourra regarder les deux faisceaux comme parallèles. Afin toutefois de ne procéder que de la manière la plus simple possible, nous laisserons ce moyen de côté, d'autant plus qu'en réalité la divergence des faisceaux est toujours fort petite et que la lumière sortant du cristal est formée en grande partie par la réunion des faisceaux S_1 et S_2, si surtout le rayon incident Ss n'est pas extrêmement délié. Voyez page 51 ce que nous avons dit sur quelque chose d'analogue pour le spath calcaire. La lumière quitte ainsi le cristal dans une direction presque perpendiculaire sur f et f' et est formée de rayons provenant de l'interférence des rayons S_1 et S_2 dont nous avons établi les équations. Or maintenant si nous faisons arriver le rayon Ss en des points correspondant à différentes épaisseurs du prisme, il n'y aura dans les équations des rayons S_1 et S_2, que la grandeur D qui changera; nous aurons ainsi toujours les mêmes rayons composants, mais avec des différences de phases diverses. La valeur absolue de la différence des phases en tant qu'elle ne provient dans le cristal que des différences de vitesses, est $D\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\lambda$, par exemple 0,01 D pour la lumière de réfrangibilité moyenne. Pour observer par ce moyen toutes les différences de phases depuis 0, le prisme devrait se terminer par une partie aiguë où l'épaisseur serait nulle, conditions qu'il n'est pas possible de réaliser. En outre, pût-on se contenter d'un seul prisme, il ne serait pas possible de mesurer facilement et avec exactitude son épaisseur en un point déterminé et par conséquent la différence de phase correspondante. Au contraire, la combinaison de deux prismes, comme M. Babinet l'a imaginé, permet d'obtenir chaque différence de phase, de la mesurer exactement, et offre en outre cette circonstance avantageuse que, par cette réunion, les rayons S_1 et S_2 sont encore rapprochés davantage de la direction de la lumière primitive. Le compensateur de M. Babinet consiste en deux prismes P_1 et P_2, fig. 64 et 65, en cristal de roche, ayant des angles réfringents égaux et très-petits, placés l'un contre l'autre au moyen d'une monture, de telle manière que les faces des angles réfringents soient deux à deux parallèles entre elles, f_1 avec f_2' et f_1' avec f_2. Dans l'un P_1 de ces prismes,

Fig. 64.



Fig. 65.



l'axe principal cristallographique est parallèle à l'arête du prisme, tandis que dans le second P_2, il est dans la face f_2', perpendiculaire à l'arête et par conséquent aussi à l'axe de P_1.

Faisons maintenant tomber perpendiculairement sur P_1 un rayon de lumière, les deux rayons S_2 et S_1 sortiront sensiblement parallèles. Les vibrations du premier sont perpendiculaires à l'axe de P_1 supposé vertical, et se propageant dans le cristal avec la vitesse $\frac{v}{\omega}$. L'équation de ce rayon est :

$$y = \mu_2 \text{ A Cos. } \alpha. \text{ Sin. } 2\pi \left(\frac{vt - x + \varphi_2}{\lambda} - \frac{D}{\lambda_2}\right).$$

Mais les vibrations sont parallèles à l'axe du second prisme. Alors quand le rayon traverse le second prisme, il subit les mêmes changements que le rayon S_1 a éprouvés dans le premier cristal. Représentons par D' l'épaisseur du prisme P_2 que traverse le rayon S_2, il est évident que le prolongement de S_2 qui sort par f_2', pourra, par suite du choix que l'on a fait de l'origine des x coordonnés, se représenter par l'équation

$$y = \mu_2\mu_1 \text{ A Cos. } \alpha. \text{ Sin. } 2\pi \left(\frac{vt - x + \varphi_1 + \varphi_2}{\lambda} - \frac{D}{\lambda_2} - \frac{D'}{\lambda_1}\right).$$

De même pour le prolongement du rayon S_1, dont les vibrations sont perpendiculaires à l'axe du second cristal, tandis qu'elles étaient parallèles à celui du premier, nous trouvons l'équation :

$$z = \mu_1\mu_2 \text{ A Sin. } \alpha. \text{ Sin. } 2\pi \left(\frac{vt - x + \varphi_2 + \varphi_1}{\lambda} - \frac{D}{\lambda_1} - \frac{D'}{\lambda_2}\right).$$

Posons $\mu_1\mu_2 \text{ A} = a$, déplaçons l'origine des x coordonnés de $+ (\varphi_1 + \varphi_2) - \lambda \left(\frac{D}{\lambda_2} + \frac{D'}{\lambda_1}\right)$ et à la place des équations trouvées plus haut pour les deux rayons en lesquels s'est partagé le rayon incident après son passage à travers le compensateur, nous obtenons les suivantes :

$$y = a \text{ Cos. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x),$$

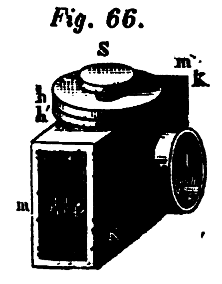
$$z = a \text{ Sin. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} \left[vt - x + (D' - D) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\lambda\right].$$

Nous pouvons mettre $+ (D' - D)\, d$, pour la différence de phase $+ (D' - D) \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \lambda$, en représentant par d la différence positive $\varepsilon - \omega$. Il y a une certaine position relative des deux prismes, pour laquelle les deux épaisseurs correspondant au même point de l'instrument sont les

mêmes; en ce point donc la différence de phase s'évanouit, et les rayons sortant du compensateur se réunissent, d'après le n° 1, page 84, en un rayon polarisé rectilignement, dont la direction des vibrations est dans le même azimuth α que celui du rayon incident. Ainsi disposé nous dirons que l'instrument est dans sa position initiale, et que le point où les épaisseurs sont les mêmes est le milieu. Déplaçons le rayon incident un peu vers la droite (l'œil étant toujours supposé placé de manière à être frappé par la lumière sortant du compensateur), alors suivant la position de l'instrument D' ou D va croître. Admettons que ce soit D', comme on l'a supposé dans la figure 65, la phase de S_1 est positive. Le rayon S_1 devance le rayon S_2 et d'une quantité d'autant plus grande qu'on s'éloigne du milieu. La différence de phase croît donc sans changer de signe à partir de zéro, proportionnellement à la distance au milieu. Mais si nous partons du milieu vers la gauche, alors $D' - D$ devient négatif, le rayon S_1 a une phase négative, est en retard sur le rayon S_2, et la différence de phase croît encore proportionnellement à la distance au milieu.

Ainsi dans le compensateur nous possédons un moyen de diviser un rayon de lumière polarisé rectilignement en deux rayons marchant dans la même direction polarisés également en ligne droite, mais dont les plans de polarisation sont perpendiculaires entre eux; on fait en même temps passer le rapport des amplitudes de ces rayons de même que leurs différences de phases par toutes les valeurs possibles et on peut ainsi d'après la théorie obtenir un rayon polarisé elliptiquement et cela d'une manière arbitraire. Quant à l'instrument, il est disposé de façon à pouvoir faire certaines mesures, comme nous allons l'indiquer. D'abord au lieu de faire arriver la lumière incidente sur différents points du premier prisme, il est préférable de déterminer les différences de phases par un simple déplacement du second prisme tandis que la position du rayon incident reste invariable. Voici dès lors la disposition du compensateur. Les deux prismes sont enchassés dans un cadre en laiton, de manière à s'ajuster exactement l'un contre l'autre dans la position convenable au-dedans de la monture en laiton KK (fig. 66) : celle-ci a la forme d'un parallélépipède rectangle ouvert sur ses deux faces m et m'. Une ouverture circulaire est pratiquée au milieu de chacune des deux autres faces latérales, ainsi sur KK contre laquelle repose f_2', de même que sur la face opposée contre laquelle est appliquée f_1. Le prisme P_1 est fixé invariablement à la monture au moyen de son cadre,

Fig. 66.



mais le prisme P_2 reste mobile dans la monture, et ce mouvement peut s'effectuer à l'aide d'une crémaillère, qui, placée tout le long de la partie supérieure du cadre de P_2, engrène avec une roue dentée que l'on peut tourner au moyen du bouton S. Nous indiquerons plus tard comment au moyen de l'angle dont on tourne le bouton S on détermine la quantité dont on a déplacé le prisme P_2 de la position pour laquelle, au milieu de l'instrument, les deux prismes ont la même épaisseur. Cet angle dont nous venons de parler se mesure au moyen du cercle divisé h qui tourne sur un vernier circulaire h'.

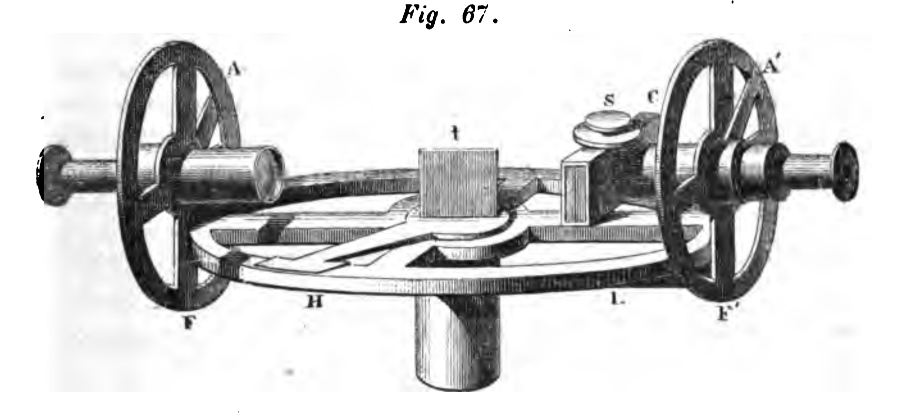
Le faisceau lumineux dirigé sur le compensateur ne devant produire que de la lumière d'une polarisation bien déterminée, devrait être tellement délié que l'épaisseur des prismes dans tous les points que le rayon rencontre pût être regardée comme la même. On arrive à ce but de la manière suivante et plus commodément qu'en cherchant à obtenir un pareil rayon incident. Sur toute la face antérieure du compensateur on laisse tomber des rayons perpendiculairement. Ceux qui sortent par l'ouverture opposée, sont alors, suivant la position de leurs points de sortie, polarisés différemment, tandis que pour tous les points d'une ligne parallèle à l'arête réfringente du prisme, il y a une même polarisation. De cette lumière émergente on isole en quelque sorte une partie également ou presque également polarisée en ne considérant que la portion du champ de la vision limitée par deux fils très-rapprochés, parallèles à l'arête réfringente et que l'on tend à la distance de la vision distincte devant le milieu du compensateur.

Pour vérifier les données de la théorie on doit enfin pouvoir placer le plan de polarisation de la lumière incidente dans un azimuth déterminé et mesurer celui de la lumière modifiée. A cet effet, les rayons primitifs plus ou moins divergents, traversent une lunette horizontale F (fig. 67) tellement disposée que les rayons en sortent parallèles à son axe. Dans son tuyau se trouve un spath calcaire polarisant (1) dont la section principale peut être amenée au moyen du bras A dans un azimuth déterminé qu'on lit sur un cercle divisé vertical. Une seconde lunette F', placé à une distance convenable, est tournée de manière que son axe soit en prolongement de celui de la première : elle est munie également d'un spath calcaire polarisant, d'un limbe et d'un index. Les rayons lumineux sortent de F polarisés rectilignement et parallèles ; après avoir traversé F' et être de nouveau devenus parallèles, ils arrivent à l'œil de l'observateur. Le compensateur est vissé horizontalement devant l'objectif

(1) Un prisme de Nicole, dont nous verrons la construction dans la IIe partie.

de F'. Les fils destinés à fixer une ligne dans le milieu du champ de la vision, à déterminer une raie de la lumière sortant du compensateur, sont tendus au

Fig. 67.



foyer principal de la lunette F'. Nous allons passer maintenant à la vérification des résultats théoriques.

Le compensateur étant dans sa position primitive, c'est-à-dire, l'épaisseur des deux prismes le long de la ligne moyenne de fils étant la même, on se convainc facilement au moyen du spath calcaire de F' que la lumière passant entre les deux fils est polarisée rectilignement, car si l'on tourne le spath autour de son axe, on arrivera bientôt à une position pour laquelle l'intervalle des fils paraîtra tout à fait obscur et l'on trouvera que cela arrive toujours quand les azimuths en A et en A' diffèrent de 90°. La lumière éteinte a donc réellement une polarisation rectiligne, et son plan de polarisation se confond avec celui de la lumière incidente, comme cela résulte de la théorie (voyez Chapitre précédent).

On déplace ensuite le prisme P_2 au moyen de la vis S. La lumière passant entre les deux fils présentera en général des caractères qui ne permettent de la regarder *ni comme de la lumière rectilignement polarisée, ni comme de la lumière ordinaire*. En effet pour aucune position du spath de F', elle n'est complétement éteinte; par conséquent sa polarisation ne saurait être rectiligne. Mais d'un autre côté elle se montre douée d'une sorte de polarité. En effet pour une certaine position du spath, l'espace compris entre les fils possède un maximum d'éclat; change-t-on l'azimuth du cristal en partant de cette position, l'éclat diminue et atteint une valeur minimum quand l'azimuth est de 90° d'un côté ou de l'autre. L'azimuth croissant encore davantage, l'éclat augmente de la même manière qu'il avait diminué auparavant. La lu-

mière en question est d'après cela formée de rayons ayant de véritables côtés en rapport avec deux plans symétriques perpendiculaires entre eux. Cette lumière, du reste, ne présente pas plus de différence aux yeux avec la lumière primitive, que la lumière polarisée en ligne droite n'en présente avec la lumière ordinaire. Nous reconnaissons là *de la lumière polarisée elliptiquement et dont les sections principales sont les deux plans symétriques sus-mentionnés.* Les considérations suivantes confirmeront cette manière de voir. Lorsque partant de la position primitive du compensateur nous dérangeons le prisme P_2 de droite à gauche, la différence de phase $+ (D' - D)\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\lambda$ des rayons qui se confondent dans la nouvelle lumière est positive et va en croissant. Quand elle a atteint la valeur $\frac{\lambda}{2}$, les équations des rayons deviennent :

$$y = a \text{ Cos. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x),$$

$$z = - a \text{ Sin. } \alpha. \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x),$$

α représentant l'azimuth de la lumière primitive. Ces rayons se composent de nouveau, d'après la page 84 1), en un rayon polarisé rectilignement dont l'azimuth est $180 - \alpha$. En effet nous reconnaîtrons au moyen du spath calcaire de F', que pour le déplacement en question, obtenu en faisant tourner le bouton S vers la droite, l'éclairement entre les deux fils est produit par de la lumière polarisée en ligne droite dans la direction donnée. Supposons que cela ait lieu quand on a tourné le bouton d'un angle w. La rotation w' correspond alors évidemment à la différence des phases $+ \frac{w'}{w}\frac{\lambda}{2}$, et si nous tournons en sens contraire du même angle, nous obtiendrons la différence de phases $- \frac{w'}{w}\frac{\lambda}{2}$. Si nous voulons au contraire obtenir la différence de phases $+ \Delta\frac{\lambda}{2}$, il faudra tourner à droite de l'angle Δw : si c'est la différence $- \Delta\frac{\lambda}{2}$, on tournera à gauche du même angle. Pour obtenir les différentes espèces de lumière polarisée elliptiquement, il se présente maintenant à nous un double moyen : premièrement nous y arrivons si nous déterminons une différence de phases $+ \frac{\lambda}{4}$ ou $- \frac{\lambda}{4}$ et si nous faisons passer la direc-

tion des vibrations de la lumière incidente successivement par tous les azimuths depuis 0° jusqu'à 180° ou ce qui revient au même depuis 0° jusqu'à + 90° et depuis 0° jusqu'à — 90°. Mais nous pouvons aussi en second lieu établir d'une manière invariable cette direction dans l'azimuth de 45°, et successivement établir toutes les différences de phases de 0 à $+\lambda$, ou aussi de 0 à $-\lambda$, ou enfin de 0 à $+\frac{\lambda}{2}$ et de 0 à $-\frac{\lambda}{2}$

Pour employer le premier procédé, tournons le bouton S du compensateur à partir de la position primitive de l'angle $\frac{w}{2}$. La composante z atteint d'après cela la différence de phase $+\frac{\lambda}{4}$ et les équations des deux rayons composants à leur sortie du cristal de roche sont :

$$y = a.\ \text{Cos.}\ \alpha.\ \text{Sin.}\ \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x),$$

$$z = a.\ \text{Sin.}\ \alpha.\ \text{Cos.}\ \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x),$$

à la place desquelles nous écrirons :

$$y = \text{A Sin. V} \qquad z = \text{B Cos. V}.$$

Pour cette position des prismes, donnons d'abord à l'azimuth α la valeur 0, l'intensité de la composante Z disparaît, et il ne sort du compensateur que les vibrations qui sont parallèles à l'axe des y et par conséquent horizontales. Ce à quoi on pouvait s'attendre d'avance et ce qu'on peut facilement vérifier au moyen du spath de F'. Faisons à partir de là croître α de manière qu'il prenne une valeur entre 0 et 45, les deux composantes Y et Z se composent en lumière polarisée elliptiquement tournant vers la droite. Le grand axe de l'ellipse décrite est a Cos. α et se confond avec l'axe des y, tandis que le petit axe a Sin. α est vertical. En tournant le spath de F' on voit que l'espace compris entre les fils paraît le plus éclairé si le plan d'oscillations du second spath est parallèle à l'axe des y, le plus sombre quand ce plan lui est perpendiculaire, et que l'éclat en passant de l'une de ces positions à l'autre croît ou décroît d'une manière continue. Nous pouvons facilement nous rendre compte de tout cela et confirmer ainsi la théorie.

Nous pouvons remplacer chacune des composantes Y et Z, par deux rayons polarisés en ligne droite, correspondants dans leur phase avec Y et Z, et ayant pour plan d'oscillation, l'un celui du spath F' et l'autre un plan perpendiculaire. Pour Y, soit z'_y l'écart de la composante, dont les vibrations sont perpendiculaires au plan d'oscillation du spath et y'^y l'écart de la seconde compo-

sante. Soient de même z'_z et y'_z les valeurs correspondantes des composantes de Z. Si α' est l'azimuth dans lequel se trouve le plan des oscillations de F', on a, comme il est facile de le trouver :

$$z'_y = y \text{ Sin } \alpha', \; y'_y = y \text{ Cos. } \alpha' ; \; z'_z = z \text{ Cos. } \alpha', \; y'_z = z \text{ Sin. } \alpha'.$$

Et si y et z ont le même signe, z_z et z'_y sont opposés, et y'_y et y'_z sont dans le même sens (Fig. 68). Maintenant le spath de F' ne laisse arriver à l'œil que les rayons provenant des vibrations y'_y et y'_z. Ces vibrations se composent en la vibration résultante $y'_y + y'_z = y \text{ Cos. } \alpha' + z \text{ Sin. } \alpha'$ de telle manière que l'écart R du rayon arrivant à l'œil sera représenté par l'équation suivante :

$$R = A \text{ Cos. } \alpha' . \text{ Sin. } V + B \text{ Sin. } \alpha' . \text{ Cos. } V.$$

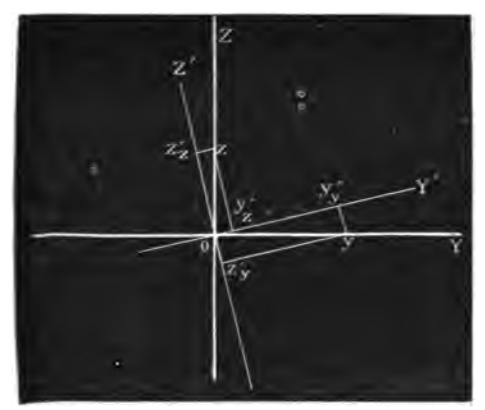
Posons : $A \text{ Cos. } \alpha' = r . \text{ Cos. } \varphi$ et $B \text{ Sin. } \alpha' = r \text{ Sin. } \varphi$,

alors $r = \sqrt{A^2 \text{ Cos.}^2 \alpha' + B^2 \text{ Sin.}^2 \alpha'}$

il vient :

$$R = \sqrt{A^2 \text{ Cos.}^2 \alpha' + B^2 \text{ Sin.}^2 \alpha'} . \text{ Sin. } (V + \varphi .)$$

Fig. 68.



L'amplitude et par suite l'intensité de ce rayon atteint, conformément au phénomène déjà rapporté, sa plus grande valeur quand α' s'annulle, c'est-à-dire, si le plan d'oscillation de F' est parallèle à l'axe des y ou au grand axe de la trajectoire elliptique. L'intensité diminue graduellement, si l'azimuth augmente, et atteint une valeur minimum si ce dernier s'élève à 90°, c'est-à-dire, si le plan d'oscillation de F' devient parallèle à l'axe des z, ou au petit axe de la trajectoire elliptique.

Le rapport de la plus grande et de la plus petite amplitude est $\frac{A}{B}$, il est ainsi égal à celui des composants Y et Z ou des axes de la trajectoire elliptique. Ce rapport, pour lequel on peut prendre a cotg. α, diminue à partir de l'infini, tandis que α croît à partir de 0° (valeur pour laquelle la trajectoire se change en une ellipse dont un axe est égal à zéro, c'est-à-dire, en une ligne droite.) Quand α atteint la valeur 45°, le rapport devient égal à l'unité. La trajec-

toire devient un cercle dont le rayon $B = a \text{ Cos. } 45° = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, et la polarisation devient circulaire vers la droite. En même temps l'amplitude de R atteint la valeur B indépendante de α'. En effet, si nous amenons le plan des vibrations du premier spath dans l'azimuth 45°, *l'espace compris entre les deux fils conserve le même éclat, de quelque manière qu'on tourne le second spath autour de son axe. La lumière polarisée circulairement ne se distingue donc ainsi en rien de la lumière ordinaire, qu'on l'observe à l'œil nu ou au moyen du spath calcaire.*

Quand l'angle α dépasse 45°, la trajectoire prend de nouveau la forme d'une ellipse. Mais maintenant que $B > A$ son grand axe coïncide avec l'axe des z. Le sens de la rotation reste le même dans le rayon elliptique, et ce dernier présente, quant à ses sections principales, les mêmes phénomènes que nous observions dans la lumière obtenue plus haut.

Un accroissement plus grand de l'azimuth α fait que le contour de l'ellipse se resserre de plus en plus et se rapproche toujours davantage du grand axe. En même temps la différence entre le maximum et le minimum de l'amplitude R, c'est-à-dire, de l'intensité de la lumière que laisse passer le second spath, quand on le tourne, devient de moins en moins sensible. Enfin quand $\alpha = 90°$, la trajectoire se transforme en une ligne droite verticale et le minimum d'intensité de R atteint la valeur 0.

Si nous faisons croître α au-delà de 90°, où, ce qui revient au même, si nous plaçons le plan d'oscillation du second spath dans un azimuth négatif, le sens de la rotation change et nous obtenons un rayon polarisé elliptiquement vers la gauche. Soit $\alpha = 90° + \beta$; les équations des rayons composants sortant du compensateur sont :

$$y = a \text{ Cos. } \alpha. \text{ Sin. V} = -a \text{ Sin. } \beta. \text{ Sin. V.}$$
$$z = a \text{ Sin. } \alpha. \text{ Cos. V} = a \text{ Cos. } \beta \text{ Cos. V.}$$

et ceux-ci se composent en un seul rayon tournant vers la gauche.

Tant que α est compris entre 90 et 135°, la trajectoire est une ellipse dont le grand axe est vertical. Les axes de la trajectoire deviennent égaux et la lumière prend la polarisation circulaire vers la gauche si $\alpha = 135°$. Si α s'approche de deux droits, le grand axe de la trajectoire elliptique recommence à se rapprocher de l'horizontale, et enfin quand α, après avoir passé par tous les azimuths, atteint la valeur 180°, il sort du compensateur des vibrations rectilignes, horizontales comme dans la position primitive du spath à laquelle nous sommes revenus. La lumière polarisée elliptiquement et tournant vers la gauche, examinée au moyen du spath, ne se distingue du reste en rien de celle tournant à droite ayant la même trajectoire; il ne peut au surplus en

être autrement, car dans l'expression de l'amplitude de R n'entrent que les demi-axes de la trajectoire et aucune grandeur dépendante du sens de la rotation.



Fig. 69.



Fig. 70.

La figure 69 représente les formes de la trajectoire pour toutes les valeurs successives de α, 0, $\frac{1}{8}\pi \ldots \frac{7}{8}\pi$. Le sens de la rotation est chaque fois indiqué par la flèche qui accompagne la figure.

Comme nous l'avons déjà remarqué page 106, et comme nous le voyons par les développements du chapitre précédent, section B, nous obtiendrons aussi toutes les différentes espèces de polarisation elliptique si nous plaçons le plan d'oscillation du premier spath dans l'azimuth $+45°$ (ou $-45°$) et si ensuite en tournant vers la droite (ou vers la gauche) le bouton S nous amenons une diffé-

rence de phase croissant de 0 à $+\lambda$ (ou de 0 à $-\lambda$) entre les deux composantes en lesquelles la lumière se divise en pénétrant dans le compensateur. Alors, d'après la théorie et comme le montre le second spath, les axes de la lumière obtenue polarisée elliptiquement ne viendront plus tomber dans les directions OY et OZ. Le sens de la rotation est vers la droite si la différence des phases φ est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}\lambda$, et vers la gauche si $\varphi > \frac{1}{2}\lambda$ et $< \lambda$. C'est l'inverse pour une différence de phase négative. Au passage de la polarisation elliptique dans un sens à la polarisation elliptique dans l'autre sens, la polarisation est rectiligne. La direction des vibrations de cette dernière est parallèle à celle de la lumière incidente pour des valeurs de φ égales à 0 et $\pm\lambda$, elle est dans l'azimuth $-45°$ et perpendiculaire aux vibrations incidentes quand la différence de phases est $\pm\frac{\lambda}{2}$. La lumière polarisée circulairement et tournant vers la droite apparaît pour $\varphi = +\frac{\lambda}{4}$ ou $-\frac{3}{4}\lambda$, elle tourne vers la gauche pour $\varphi = +\frac{3}{4}\lambda$ ou $-\frac{1}{4}\lambda$.

La figure 70 représente les trajectoires elliptiques de la lumière obtenue au moyen du compensateur pour les différences de phases 0, $\frac{1}{8}\lambda \ldots \frac{7}{8}\lambda$.

En comprenant bien ce qui précède il sera facile de déterminer à l'avance ce qui doit arriver pour une position quelconque du compensateur et du premier spath, et l'observation est toujours d'accord avec les conséquences de la théorie.

Le but primitif du compensateur de M. Babinet, dont nous nous sommes servis pour obtenir la lumière polarisée elliptiquement, était de chercher parmi les attributs d'un rayon polarisé elliptiquement, le sens de la rotation, la position et le rapport des axes de la trajectoire. Nous allons montrer comment se font ces déterminations. Supposons que perpendiculairement à la face f_1 du compensateur tombe un rayon polarisé elliptiquement. Celui-ci peut être regardé comme résultant de deux rayons composants de même longueur d'onde que lui, dont les vibrations sont parallèles aux axes OY et OZ, et tous les éléments dont nous avons parlé se détermineront facilement, quand le rapport des amplitudes et la différence de phases des rayons composants seront connus. Les équations de ceux-ci peuvent être mises sous la forme :

$$y = \text{A Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x), \qquad z = \text{B Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + \Delta),$$

dans lesquelles A, B et Δ représentent les amplitudes inconnues et la différence des phases. Si maintenant le compensateur se trouve dans sa position primitive, on peut représenter les composantes de la lumière qui en sort par

deux équations qui ne diffèrent des précédentes que parce que, à la place de A et de B, on mettra $\mu_1 \mu_2$ A et $\mu_1 \mu_2$ B, où μ_1 et μ_2 représentent de nouveau, comme à la page 99, les coefficients d'affaiblissement des deux espèces de vibrations. Si nous déplaçons le prisme P_2 de droite à gauche, la phase de z croît d'une quantité positive. Ainsi si Δ est positif, la différence de phases des rayons composants augmente, tandis qu'elle diminue si Δ est négatif; et le contraire a lieu si nous déplaçons le prisme de gauche à droite. Tournons maintenant le bouton S d'un côté ou de l'autre pour trouver le plus petit angle de rotation possible pour lequel la lumière passant entre les fils se montre polarisée rectilignement, ce qu'on examinera au moyen du second spath. Cela arrive pour un déplacement qui correspond à un accroissement Δ' de la différence des phases, et soit alors α l'azimuth du rayon polarisé en ligne droite provenant de l'action du compensateur sur le rayon polarisé elliptiquement. Les équations des rayons composants sortant du compensateur peuvent se mettre sous la forme :

$$y = \mu_1 \mu_2 \text{ A Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x),$$

$$z = \mu_1 \mu_2 \text{ B Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + \Delta + \Delta')$$

Et comme maintenant ces rayons forment un rayon polarisé en ligne droite, on peut les considérer comme deux rayons dont les phases sont égales ou diffèrent de $\pm \lambda$, $\pm 2\lambda$ etc.

Nous avons ainsi :

$$\Delta = -\Delta' \text{ ou } \Delta = -\Delta' - \lambda \text{ ou } \Delta = -\Delta' - 2\lambda \text{ etc.}$$
$$\text{ou } \Delta = -\Delta' + \lambda \text{ ou } \Delta = -\Delta' + 2\lambda \text{ etc.}$$

On ne peut décider laquelle de ces valeurs en nombre infini et qui s'offrent pour Δ il faudra choisir, quand le rayon examiné est donné seul. En effet l'interférence de deux rayons polarisés à angle droit donne toujours le même nouveau rayon si l'on déplace le long de l'axe commun l'un ou l'autre des rayons composants, en avant ou en arrière d'une quantité λ, 2λ, etc. Mais si le rayon soumis à l'expérience fait partie d'une série de rayons pour les composantes desquels nous avons, n'importe comment, une donnée certaine, on peut trouver Δ sans équivoque. Si par exemple nous avions à déterminer un certain nombre de rayons faisant partie d'un ensemble de rayons pour lesquels la différence de phases Δ des composantes augmenterait d'une manière continue en partant de zéro, nous prendrions pour le premier rayon la plus petite valeur possible de Δ et nous tournerions ensuite toujours dans le même sens

et de plus en plus le bouton S pour reconnaître chaque fois pour les termes suivants la différence de phases.

Les vibrations du rayon obtenu par la détermination de Δ sont, d'après la mesure prise, dans l'azimuth α, et par suite on a

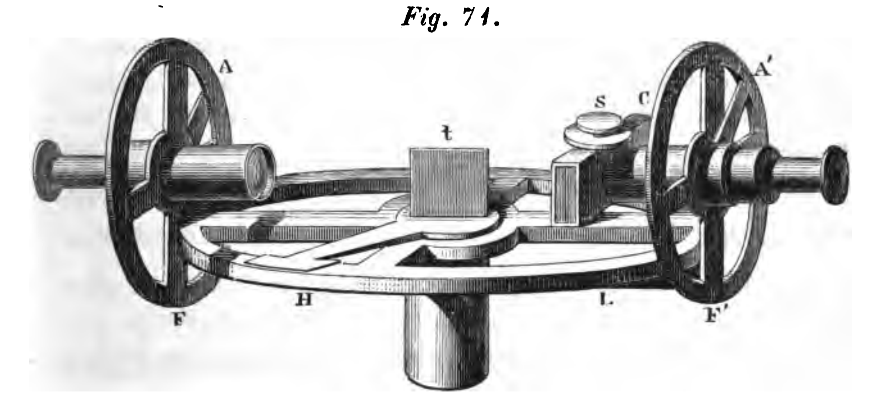
$$\frac{\mu_1 \mu_2 A}{\mu_1 \mu_2 B} = \frac{A}{B} = \text{Cotg. } \alpha.$$

On aurait donc ainsi déterminé le rapport des amplitudes de la composante horizontale et de la composante verticale de la lumière incidente. De ce rapport et de la différence de phase Δ on déduit facilement la position et le rapport des axes de la trajectoire elliptique.

Dans ces derniers temps, M. Jamin a employé le compensateur avec beaucoup de succès à des recherches sur la lumière réfléchie. Nous allons rappeler ses travaux comme exemple d'une très-belle étude de la lumière polarisée elliptiquement (1).

M. Jamin plaça les lunettes F et F' figure 71, sur les rayons mobiles L

Fig. 71.



d'un cercle divisé horizontal H. Au centre de ce dernier se trouve une petite tablette *t* qu'on peut faire tourner autour d'un axe vertical. Sur cette tablette on dispose le corps réfléchissant de manière que sa face réfléchissante soit tout à fait verticale. La lumière du soleil colorée par un verre rouge bien homogène est réfléchie dans la lunette F au moyen d'un héliostat et tombe alors polarisée en ligne droite sur la surface réfléchissante. Renvoyée de là elle arrive perpendiculairement sur le compensateur C et est étudiée ultérieurement au moyen de cet instrument et du spath placé dans F'.

(1) *Annales de physique et de chimie*, 3e série, t. XXIX et XXXI.

M. Jamin trouva qu'en général, un rayon polarisé en ligne droite est changé par la réflexion en un rayon polarisé elliptiquement, tant que le plan de polarisation du rayon incident n'est ni parallèle ni perpendiculaire au plan d'incidence, cas dans lesquels la polarisation ne change pas. On peut se rendre compte de ce fait en décomposant le rayon incident en deux autres rayons composants, dont les phases seraient égales et dont l'un aurait son plan de vibration perpendiculaire au plan d'incidence, tandis que pour l'autre les vibrations seraient dans ce dernier plan. Par le fait de la réflexion, ces deux rayons composants seraient différemment modifiés dans leur intensité et dans leur phase, si bien que le rayon réfléchi, résultant de ces deux rayons composants modifiés, serait en général polarisé elliptiquement. Supposons la lumière incidente polarisée à 45° du plan d'incidence et soit a l'amplitude des deux composantes. Par le fait de la réflexion, le rayon composant dont les vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence sera tellement affaibli que son amplitude deviendra par exemple σa; celle du second rayon composant réfléchi sera aussi ρa. Après la réflexion les deux rayons composants prendront en outre une différence de phase Δ que nous regarderons comme positive si la composante dont les vibrations sont perpendiculaires au plan d'incidence devance l'autre, et comme négative si elle est en arrière. A l'aide du compensateur on pourra ramener le rayon réfléchi polarisé elliptiquement à être polarisé en ligne droite dans un azimuth connu qui nous permettra de calculer le rapport d'affaiblissement $\frac{\rho}{\sigma}$ ou des amplitudes des deux composantes. Le compensateur par son déplacement nous indiquera la différence de phase dont il a fallu augmenter ou diminuer celle Δ due à la réflexion pour qu'après la sortie du compensateur la différence de marche soit un multiple de $\frac{\lambda}{2}$; $\frac{\rho}{\sigma}$ et Δ étant ainsi connus, nous en pourrons enfin déduire la position et le rapport des axes de la trajectoire elliptique ainsi que le sens de la rotation. Si le plan de polarisation du rayon incident fait avec le plan d'incidence un angle autre que 45°, soit α, la valeur de Δ se déterminera comme précédemment. Mais le rapport des amplitudes des deux rayons composants après la réflexion sera $\frac{\rho a \text{ Cos. } \alpha}{\sigma a \text{ Sin. } \alpha}$, a étant l'amplitude du rayon incident, amplitude que nous n'avons pas à déterminer. L'azimuth du rayon résultant sortant du compensateur polarisé en ligne droite étant β, on aura $\frac{\rho a \text{ Cos. } \alpha}{\sigma a \text{ Sin. } \alpha} = \frac{a' \text{ Cos. } \beta}{a' \text{ Sin. } \beta}$, d'où l'on déduira encore $\frac{\rho}{\sigma}$.

Dans toutes les expériences de M. Jamin, l'angle α était de 84°, le plan des vibrations de la lumière incidente n'était incliné que de quelques degrés sur le plan d'incidence, parce que d'une part l'intensité de la lumière incidente devait être très-grande pour qu'on pût saisir le rayon composant dont les vibrations étaient dans le plan d'incidence, et que d'autre part pour une trop grande inclinaison la lumière réfléchie eût été trop intense pour l'œil.

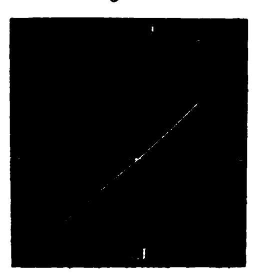
Parmi les nombreuses recherches de M. Jamin, nous donnons ici le tableau des résultats qu'il a obtenus avec l'opale de feu et l'hyalithe. On y a consigné pour différentes incidences les valeurs du rapport d'affaiblissement $\frac{\rho}{\sigma}$ et la différence de phases Δ des deux rayons composants mesurée en demi-longueur d'onde. Pour l'incidence normale la différence de phases a été prise égale $\pm \frac{\lambda}{2}$, c'est-à-dire que si l'on tournait le rayon réfléchi autour du point d'incidence pour l'amener en prolongement du rayon incident, la direction de ses vibrations serait perpendiculaire à celle de ce dernier.

OPALE DE FEU.			HYALITHE.		
INCIDENCE.	Δ	$\frac{\rho}{\sigma}$	INCIDENCE.	Δ	$\frac{\rho}{\sigma}$
90°. 0'	+ 2,000	1,0000	90°. 0'	— 2,000	1,0000
60 . 0	+ 1,843	0,0738	56 . 0	— 1,924	0,0342
59 . 45	+ 1,810	0,0680	55 . 30	— 1,898	0,0214
59 . 30	+ 1,754	0,0617	55 . 15	— 1,850	0,0105
59 . 15	+ 1,705	0,0372	55 . 0	— 1,641	0,0080
59 . 0	+ 1,666	0,0331	54 . 52	— 1,500	0,0075
58 . 45	+ 1,609	0,0312	54 . 45	— 1,329	0,0078
58 . 30	+ 1,540	0,0302	54 . 30	— 1,177	0,0148
58 . 22	+ 1,500	0,0281	54 . 15	— 1,140	0,0203
58 . 15	+ 1,455	0,0287	53 . 30	— 1,092	0,0352
58 . 0	+ 1,397	0,0316	0 . 0	— 1,000	1,0000
57 . 45	+ 1,337	0,0321			
57 . 30	+ 1,295	0,0362			
57 . 0	+ 1,220	0,0441			
56 . 30	+ 1,163	0,0620			
56 . 0	+ 1,143	0,0670			
0 . 0	+ 1,000	1,0000			

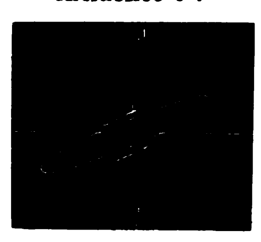
Nous voyons d'après les recherches de M. Jamin que la différence de phases Δ suivant la nature du milieu est tantôt positive, tantôt négative, c'est pour cela que M. Jamin distingue les corps en corps *à réflexion positive et à réflexion négative.* La différence de phases en valeur absolue est toujours prise égale à une demi-longueur d'onde pour l'incidence perpendiculaire, et elle augmente avec l'angle d'incidence jusqu'à une longueur d'onde, valeur qu'elle atteint dans le cas de l'incidence rasante. Pour une certaine valeur de l'angle d'incidence comprise entre 0° et 90°, Δ devient égal à $\pm \frac{3}{4} \lambda$, cet angle change d'une substance à l'autre, et est appelé par M. Jamin, *angle d'incidence principal.* Pour l'opale de feu il est, par exemple, de 58° 22'. D'après cela si le plan de vibrations du rayon incident est incliné de 45° sur le plan d'incidence, la nature de sa polarisation ne change pas pour l'incidence rasante. Mais en partant de là si l'angle d'incidence diminue, la polarisation rectiligne se change en polarisation elliptique vers la droite pour un corps positif, et vers la gauche pour un corps négatif. En même temps le petit axe de la trajectoire s'approche toujours davantage du plan d'incidence, et l'atteint pour une incidence égale à l'angle d'incidence principal, auquel cas la différence de phase devient $\pm \frac{3}{4} \lambda$. Si l'angle d'incidence décroît encore davantage le petit axe passe de l'autre côté du plan d'incidence, et la trajectoire se rapproche de nouveau de la ligne droite. Enfin elle devient une ligne droite si la lumière incidente tombe perpendiculairement sur la face réfléchissante. La trajectoire elliptique est surtout très-comprimée comme on peut le voir d'après le rapport des amplitudes. Ce dernier est aux deux limites égal à l'unité, de telle manière que pour l'incidence rasante la direction des vibrations de la lumière réfléchie se confond avec celle de la lumière incidente, tandis que ces deux directions sont perpendiculaires pour l'incidence normale. A partir de ces extrêmes, le rapport d'affaiblissement diminue, descend rapidement dans le voisinage de l'angle d'incidence principal vers sa valeur minimum qui est le plus souvent une très-petite fraction et atteint cette valeur juste pour l'angle d'incidence principal.

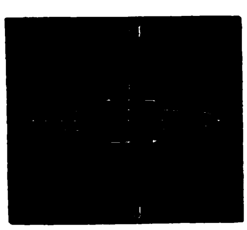
Un petit nombre de *corps neutres* forme le passage des corps positifs aux corps négatifs. Pour ceux-là, Δ conserve les valeurs absolues $\frac{\lambda}{2}$ et λ depuis l'incidence perpendiculaire et l'incidence rasante jusqu'à l'angle d'incidence principal, et le minimum du rapport des amplitudes ne s'écarte pas sensiblement de zéro. Il en résulte que dans ce cas, le rayon réfléchi est pour chaque incidence polarisé rectilignement et que les vibrations parallèles au plan

Fig. 72.

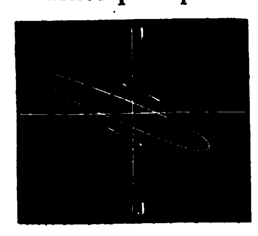


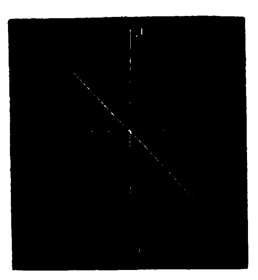
Incidence 0°.





Incidence principale.





Incidence 90°

d'incidence s'éteignent dans la lumière réfléchie sous l'angle d'incidence principal (1).

La figure 72 représente les formes et les positions des trajectoires successives dans la lumière réfléchie pour une incidence croissante et pour un corps négatif. On y suppose que le rayon arrive de l'espace situé derrière le tableau, et que JJ est la direction du plan d'incidence.

Le compensateur ne donne jamais qu'un faisceau très-délié de lumière polarisée elliptiquement, tandis qu'il serait à désirer de pouvoir opérer sur un faisceau plus considérable. C'est ce que l'on peut obtenir en faisant arriver un rayon de lumière polarisée en ligne droite sur une mince feuille de *mica* : la lumière émergente est en général polarisée elliptiquement. En effet il ne se propage à travers une pareille feuille de mica et perpendiculairement à ses faces que des rayons

(1) D'après ce qui a été dit plus haut, la réflexion sous l'incidence principale d'un rayon non polarisé, fait disparaître dans le rayon réfléchi la plus grande partie ou la totalité des vibrations parallèles au plan d'incidence, et la lumière réfléchie est alors complétement ou presque complétement polarisée en ligne droite dans le plan d'incidence. Cette polarisation de la lumière par réflexion fut découverte en 1808 par Malus. Brewster, en s'appuyant sur l'expérience, posa cette loi que *la tangente de l'angle de polarisation (de l'angle d'incidence principal), est égale à l'indice de réfraction de la substance réfléchissante*, et cette loi dans les limites de l'observation se confond avec celle que la théorie déduit de la relation entre l'angle d'incidence principal, le rapport des amplitudes et l'indice de réfraction, de telle sorte que de l'observation de l'angle d'incidence principal on peut facilement déduire l'indice de réfraction (même pour les corps opaques). La polarisation elliptique par réflexion fut observée pour la première fois en 1815 par Brewster sur les métaux pour lesquels la valeur minimum du rapport des amplitudes est assez grande.

lumineux polarisés en ligne droite, dont les directions des vibrations sont parallèles à deux plans de position invariable dans le cristal de mica. Ceux-ci sont perpendiculaires l'un sur l'autre et sur les faces de la feuille; on les nomme *sections principales*, et les deux rayons possèdent des vitesses différentes. La chose se passe donc absolument de la même manière que dans une lame de cristal de roche taillée parallèlement à l'axe principal cristallographique. Après plusieurs essais, on arrivera facilement à détacher d'une plaque un peu épaisse de mica, une feuille qui enlève la polarité à la lumière polarisée en ligne droite qui la traverse perpendiculairement, si le plan de polarisation de cette lumière est incliné de 45° sur les sections principales et la change ainsi en lumière polarisée circulairement. Il est clair que cela n'arrivera que pour une lame qui occasionnera une différence de phases $\pm \frac{\lambda}{4}$ entre les rayons composants dans lesquels se décompose la lumière incidente. Maintenant en changeant la direction de polarisation de la lumière incidente par rapport aux sections principales de la lame de mica, on obtiendra toutes les sortes de lumière polarisée elliptiquement, attendu qu'elles résultent toutes de deux composantes dont la différence des phases est $\frac{\lambda}{4}$. Le faisceau de la lumière ainsi obtenue, n'aura donc d'autres limites que la largeur du faisceau incident et l'étendue superficielle de la feuille de mica. Toutefois on ne doit pas perdre de vue que la différence de phases en question, exactement obtenue, ne peut jamais s'appliquer qu'à des rayons d'une couleur déterminée, puisque les vitesses de vibration dans le mica comme dans le cristal de roche changent d'une couleur à l'autre. Mais si l'on choisit l'épaisseur de la lame de manière à obtenir cette différence de phases pour la lumière de réfrangibilité *moyenne*, les diverses parties colorées de la lumière blanche qui traversera le mica, auront toutes très-approximativement une égale polarisation.

Le gypse se comporte d'une manière tout à fait analogue au mica, M. Stockes (1) s'en est servi dans ces derniers temps pour faire un nouveau compensateur qui se recommande par sa simplicité, mais qui, sous plusieurs autres points de vue, est inférieur à celui de Babinet. M. Stockes fait tomber le rayon polarisé elliptiquement à étudier, perpendiculairement sur une feuille de gypse qui produit une différence de phases $\frac{\lambda}{4}$ pour la lumière de réfran-

(1) Nouvel analyseur pour la lumière polarisée elliptiquement; par Stockes. *Ann. de Poggendorf*, 3e vol. supplémentaire.

gibilité moyenne et il le fait arriver de telle manière que ses sections principales coïncident avec celle du gypse. La lumière sort de ce dernier polarisée en ligne droite, et on détermine le plan des vibrations émergentes au moyen d'un spath calcaire. De l'inclinaison de ce plan sur les sections principales du gypse on peut déduire facilement le rapport des axes de la trajectoire elliptique.

Avant de passer à une autre étude, nous ferons à propos du compensateur une remarque qui nous servira pour l'expression de l'intensité d'un rayon lumineux. Si nous enlevons le spath dans F' et si nous laissons la lumière sortant du compensateur arriver à notre œil sans être décomposée, nous n'apercevrons aucun changement en faisant glisser le prisme P_2 d'un côté ou de l'autre d'une quantité arbitraire. Deux rayons polarisés à angle droit l'un sur l'autre, qui suivent la même route (ou plutôt la lumière qui en résulte polarisée tantôt en ligne droite, tantôt elliptiquement, soit à droite soit à gauche) produisent donc sur l'œil toujours la même impression, de quelque manière qu'on déplace un rayon par rapport à l'autre. Nous concluons de là que les impressions de deux pareils rayons composants sont sans influence mutuelle et que dès lors ils s'ajoutent simplement pour produire leur impression totale. Il n'en est plus ainsi quand les plans de polarisation des deux rayons font un angle aigu. Si, par exemple, ces deux plans se confondent, l'impression totale dépend de la position relative des rayons; l'impression de l'un sera diminuée ou augmentée par celle de l'autre (voyez Ch. VI). Soient maintenant a et b les amplitudes de deux rayons polarisés à angle droit. La mesure de l'impression est une certaine fonction $f(a)$ et $f(b)$ des amplitudes. Pour la mesure de l'impression totale, il faudra, puisque chaque impression élémentaire reste telle quelle, prendre la somme $f(a) + f(b)$. Mais si les phases des deux rayons sont égales, ils se composent en un rayon polarisé en ligne droite dont l'amplitude est $\sqrt{a^2 + b^2}$ et dont l'impression sera par conséquent représentée par $f(\sqrt{a^2 + b^2})$. Nous avons alors :

$$f(a) + f(b) = f(\sqrt{a^2 + b^2})$$

Dans le cas particulier où les amplitudes des deux rayons sont égales, nous aurons :

$$2 f(a) = f(\sqrt{2 a^2})$$

Pour être d'accord avec les remarques faites jusqu'à présent sur l'intensité, nous satisferons à cette équation le plus simplement possible en admettant que le signe f est celui de la 2e puissance, et nous poserons

$$f(a) = a^2$$

Nous mesurons ainsi l'intensité d'un rayon polarisé en ligne droite par le

carré de son amplitude : s'il s'agissait d'un rayon polarisé elliptiquement il faudrait alors prendre la somme des carrés des amplitudes des deux rayons composants polarisés à angle droit, qui le forment. Nous verrons plus tard une confirmation nouvelle de ce mode de mesure (1).

CHAPITRE VIII.

De la lumière naturelle.

La lumière naturelle, c'est-à-dire, non polarisée, peut être regardée comme la résultante de deux rayons polarisés rectilignement et à angle droit, ainsi que le montre son analyse au moyen du spath d'Islande, du cristal de roche, du mica. Les propriétés et les rapports mutuels de ces deux composantes se trouvent déterminés par les caractères de la lumière naturelle, non pas il est vrai complétement, mais cependant d'une manière assez approchée dans certaines limites. MM. Fiseau et Foucault, par leurs recherches rapportées plus haut, ont montré que deux rayons de lumière naturelle émanant de la même source, peuvent être déplacés l'un par rapport à l'autre d'un grand nombre de longueurs d'ondes, sans que leur interférence diffère d'une manière appréciable de celle qu'ils offrent quand ils sont composés de vibrations tout à fait égales. Nous en concluons qu'un nombre considérable de vibrations égales se suivent dans la lumière naturelle. Cela doit aussi exister nécessairement dans les composantes et alors dans les unes et dans les autres doivent aussi se succéder beaucoup de vibrations égales entre elles et en outre une série de pareilles vibrations doit dans ces deux rayons commencer et finir en même temps.

Pour déterminer le rapport entre ces séries de vibrations égales qui se succèdent dans un seul et même rayon, et aussi entre les vibrations d'une série d'un rayon et de la série correspondante du second, on ne peut s'appuyer que sur ce fait que les vibrations résultantes fournissent un rayon sans traces de polarité et d'un éclat qui reste toujours le même. Nous nous bornerons à

(1) On ne perd pas de vue qu'il ne s'agit ici que de la comparaison et de la mesure des intensités des lumières également colorées.

ne considérer que de la lumière d'une intensité constante, car de celle-ci on déduira facilement les propriétés d'une lumière d'intensité variable ; d'ailleurs on ne rencontre guère en général que la première, au moins pendant la durée des expériences. Quant aux composantes de la lumière naturelle, nous ferons les suppositions les plus générales possibles, autant toutefois que cela sera nécessaire pour satisfaire aux deux conditions que nous venons d'indiquer. Nous admettrons dès lors que la phase et l'amplitude dans un seul et même rayon composant changent d'une série d'égales vibrations à l'autre, tout aussi bien que la différence de phases et le rapport des amplitudes changent quand on passe, de deux séries qui se correspondent dans l'un et dans l'autre rayon composant; aux deux séries qui suivent immédiatement. La lumière naturelle consisterait d'après cela en séries de vibrations égales, en général elliptiques, changeant d'une série à la suivante quant au sens de la rotation, quant à la position, au rapport et à la grandeur des axes de la trajectoire. Mais nous limiterons d'abord cette manière de voir générale par cette autre condition que la valeur moyenne de l'intensité ne change pas d'une manière sensible pendant des intervalles de temps qui, tout en étant trop petits pour que l'œil perçoive la lumière, renferment cependant un très-grand nombre de vibrations. Soient $\tau_1, \tau_2 \ldots$ de pareilles périodes extrêmement courtes. Dans le temps α, doivent avoir lieu sur un rayon n_1 vibrations dont nous supposerons que les axes soient α'_1 et β'_1, α''_1 et β''_1, etc. De même soient α'_2 et β'_2, α''_2 et $\beta''_2 \ldots$ les axes des n_2 vibrations qui ont lieu pendant le temps τ_2 et ainsi de suite.

D'après ce qui précède on aura :

$$\frac{[(\alpha'_1)^2 + (\beta'_1)^2] + [(\alpha''_1)^2 + (\beta''_1)^2] + \ldots}{n_1}$$

$$= \frac{[(\alpha'_2)^2 + (\beta'_2)^2] + [(\alpha''_2)^2 + (\beta''_2)^2] + \ldots}{n_2} = \text{etc.}$$

Si cette condition est remplie pour des temps très-petits τ_1, $\tau_2 \ldots$ alors pour des temps plus longs renfermant un nombre quelconque de ces instants, et dont la durée totale peut devenir suffisante pour que la sensation ait lieu, la valeur moyenne conserve une grandeur constante et le rayon possède un éclat toujours égal.

La seconde hypothèse caractéristique nécessitée par la nature même de la lumière naturelle, c'est que dans le très-grand nombre de vibrations qu'une molécule d'éther exécute dans un temps très-court, aucune direction perpendiculaire au rayon ne doit offrir quelque chose de particulier, de plus remarquable que les autres, tout ce qu'on peut observer dans une de ces directions

pendant un pareil instant, chaque autre direction doit le présenter aussi, abstraction faite des différences qui seraient sans influence sur le résultat final. Pour approfondir davantage cette importante circonstance, nous allons examiner un cas particulier auquel cette supposition satisfait.

Figurons-nous que le rayon sortant d'un spath d'Islande polarisant, offre une constitution parfaitement identique dans toute sa longueur; admettons que le plan des vibrations du spath se trouve pour le temps 0 dans l'azimuth 0 : qu'il reste dans cette position pendant le temps infiniment petit dt, lequel embrasse cependant un grand nombre de vibrations. A la fin du temps dt, supposons que le spath tourne brusquement autour du rayon émergent comme axe, dans le très-petit azimuth $d\alpha$; qu'il reste dans cette nouvelle position pendant un nouveau temps très-court dt, qu'à la fin du temps $2\,dt$, il tourne de nouveau brusquement dans l'azimuth $2\,d\alpha$ etc. Après le temps ndt le plan de vibrations reviendra dans l'azimuth primitif et ce temps ndt bien qu'embrassant un grand nombre de vibrations sera cependant trop court pour pouvoir être mesuré, puisque la durée de la vibration est si extraordinairement petite. On conçoit donc que la lumière sortant du spath d'Islande qui passe brusquement d'un azimuth au suivant, ou plutôt qui tourne d'un mouvement uniforme, puisque $d\alpha$ est infiniment petit, on conçoit, disons-nous, que cette lumière, bien que composée de rayons complétement polarisés en ligne droite ne peut cependant montrer aucune polarité. Supposons en effet qu'elle tombe sur un second spath dont le plan des vibrations est dans l'azimuth β. Si nous représentons par a l'amplitude de la lumière venant du premier spath et si nous n'avons pas égard à l'affaiblissement insignifiant de la lumière par le fait de la réflexion et de la réfraction, il sortira du second spath pendant le temps 0 à dt, dt à $2\,dt$,..... $(n-1)\,dt$ à ndt un même nombre de vibrations dont les amplitudes auront les valeurs suivantes :

$$a \operatorname{Cos.} \beta, \quad a \operatorname{Cos.} (\beta - d\alpha), \ldots \quad a \operatorname{Cos.} [\beta - (\pi - d\alpha)].$$

Mais si nous comptons le temps à partir du moment où le premier spath tombe dans l'azimuth β (et nous pouvons toujours choisir $d\alpha$ assez petit, pour qu'un des azimuths du premier spath coïncide avec β), alors aux temps 0 à dt, dt à $2\,dt$,.... correspondent les amplitudes

$$a, \quad a \operatorname{Cos.} d\alpha, \quad a \operatorname{Cos.} 2\,d\alpha \ldots\ldots \quad a \operatorname{Cos.} (\pi - d\alpha).$$

Si maintenant nous supposons que le temps de la rotation du premier spath est assez petit pour que l'œil ne puisse pas distinguer comme séparés les faisceaux lumineux correspondants aux divers azimuths, nous jugerons de l'intensité par la valeur moyenne des carrés des différentes amplitudes séparément. Or la suite de ces dernières est toute composée de termes indépendants

de β; il en résulte donc que l'intensité du rayon sortant du second spath paraîtra toujours la même, quelle que soit la position de ce spath, ou en d'autres termes, que la lumière sortant du premier spath n'offrira aucune polarité.

En outre il est facile de voir que la lumière qui sort du second spath polarisée en ligne droite est moitié moins intense que la lumière incidente non polarisée. La valeur moyenne de l'intensité de toutes les vibrations qui tombent dans l'azimuth $\mu d\alpha$ est $(a \text{ Cos. } \mu d\alpha)^2$. Les azimuths sont au nombre de $\frac{\pi}{d\alpha}$, donc la valeur moyenne de l'intensité totale est :

$$a^2 [1 + \text{Cos.}^2\, d\alpha + \text{Cos.}^2\, 2\, d\alpha + \ldots + \text{Cos.}^2\, (\pi - d\alpha)]\, \frac{d\alpha}{\pi}$$
$$= \frac{a^2}{\pi} \int_0^\pi \text{Cos.}^2\, \alpha\, d\alpha = \frac{a^2}{2}.$$

C'est donc la moitié de l'intensité de la lumière incidente et par conséquent aussi le rayon polarisé est moitié moins intense que le rayon non polarisé.

Les considérations précédentes s'appliquent évidemment aux deux espèces de vibrations qui traversent le spath d'Islande, de telle manière que les deux rayons partiels dans lesquels le rayon incident sera partagé, offrent le même éclat n'étant pas affaiblis d'une manière sensiblement différente par le fait de la réfraction (voir page 46).

L'hypothèse que la lumière naturelle serait composée comme celle qui sort du premier spath suffit pour expliquer la manière dont elle se comporte dans les circonstances qui nous sont connues jusque maintenant. Mais elle n'est nullement nécessaire, si même, ce qui est tout à fait arbitraire, nous admettons des vibrations rectilignes dans la lumière naturelle. Quand bien même les vibrations qui sont dans un azimuth déterminé n'auraient pas des amplitudes tout à fait égales, mais qui s'affaibliraient dans certaines limites, de manière que les intensités correspondantes donneraient une intensité moyenne constante, et qu'en outre la phase changerait en passant aux séries suivantes, dont les vibrations sont dans des azimuths différents, le résultat serait évidemment le même que dans le cas considéré. Les vibrations situées dans le même azimuth produiraient un rayon polarisé en ligne droite, comme nous l'avons toujours admis pour conserver l'hypothèse la plus générale : tous ces rayons se composeraient ensuite en un seul non polarisé. Nous pouvons réaliser toutes ces conditions par l'expérience et prouver ainsi l'exactitude des considérations précédentes. Le physicien allemand Dove fit arriver sur un spath calcaire polarisant, qui tournait rapidement et d'un mouvement uniforme, de la

lumière naturelle parallèle à l'axe de rotation. La lumière émergente consistait en rayons tous également intenses, polarisés en ligne droite, dont l'azimuth du plan de vibration augmentait de quantités égales dans des temps égaux. La durée de la rotation était infiniment grande comparativement à celle des vibrations, tandis que d'un autre côté elle était trop petite pour être saisissable à nos sens. La lumière ainsi obtenue se comportait tout à fait comme la lumière naturelle : elle était, par exemple, divisée par un spath en deux rayons également éclairés et ne donnait aucune trace de polarisation. Toutefois on comprend que cela n'arrivera qu'autant que la durée de la lumière sortant du spath en rotation sera égale à celle d'une révolution entière ou à un multiple de celle-ci, de sorte que tous les différents états vibratoires dont la succession rapide annule la polarisation puissent arriver à l'œil. La polarisation rectiligne reparaîtrait aussitôt que le plan de polarisation ne pourrait tourner que d'un très-petit angle pendant la durée de la lumière. C'est ce que Dove observa en éclairant le spath tournant par l'étincelle d'une bouteille de Leyde dont la durée comme on sait est très-courte, mais dont l'intensité est assez grande pour que l'œil soit impressionné d'une manière sensible malgré le peu de durée de la sensation. L'inertie de la rétine prolonge en outre cette impression, absolument comme cela arrive pour une lumière de plus longue durée, dont les impressions successives se superposent en quelque sorte.

Dans la lumière naturelle il n'est pas possible, en diminuant sa durée, de reconnaître de polarisation, et c'est là ce qui établit une différence essentielle entre elle et la lumière non polarisée obtenue artificiellement par le moyen que nous venons de décrire. Il faut donc admettre dans la lumière naturelle que les changements successifs d'azimuth se suivent avec une rapidité excessivement grande.

En regardant, d'après ce qui précède, la lumière naturelle comme composée de vibrations rectilignes, nous admettons implicitement plusieurs choses qui cependant ne paraissent pas nécessaires et dont la suppression n'apporterait pas de changement dans le résultat final. Ainsi nous supposons que l'azimuth croît d'une manière continue avec le temps, que dans chaque azimuth il y a le même nombre de vibrations, que toutes les vibrations qui correspondent à un azimuth déterminé se succèdent sans interruption avant de passer à un autre azimuth. Nous ne nous préoccuperons pas de ces hypothèses et nous poserons le principe suivant qui *satisfait* aux phénomènes : la lumière non polarisée consiste en groupes de vibrations nombreuses, égales entre elles et rectilignes. Les directions des vibrations de ces groupes passent dans un temps très-court par tous les azimuths possibles et la valeur moyenne des intensités

de toutes les vibrations est constante d'un azimuth à l'autre, si l'intensité de la lumière ne varie pas. Si un pareil rayon de lumière non polarisée se compose avec un second dans lequel nous supposerons seulement que les portions d'égales vibrations coïncident avec celles du premier, le rayon résultant ne présentera pas plus de polarité que chacun des composants. Mais en général ses vibrations seront elliptiques et d'une étendue où les vibrations sont égales à une autre étendue analogue, la grandeur des axes changera ainsi que leur rapport, leur position, et le sens de la rotation. De cette manière se trouve éliminée l'hypothèse toute gratuite que les vibrations ne pouvaient être que rectilignes, et on arrive sur la constitution de la lumière naturelle à une idée générale qui n'est limitée que dans ce qu'il y a d'absolument nécessaire.

A l'appui de cette hypothèse nous citerons une autre expérience de Dove, dans laquelle une succession de vibrations elliptiques produit de la lumière non polarisée, pourvu qu'on fasse tourner la trajectoire dans tous les azimuths pendant un temps très-court et d'un mouvement uniforme. Dove fixa devant un spath tournant et perpendiculairement à l'axe de rotation, une lame de mica qui produisait une différence de phase de $\frac{1}{4}$ λ. La lumière sortant du spath était donc de la lumière polarisée elliptiquement dont la trajectoire changeait de forme et de sens suivant la position des sections principales du mica par rapport à celles du spath. Le spath et le mica tournant uniformément, la lumière émergente, quelle que soit sa polarisation primitive, se comportait comme si elle n'était pas polarisée, à la condition toujours que sa durée fût dans le rapport que l'on a dit avec celle de la rotation.

De ce qui précède, nous déduirons ces propositions importantes : 1° un rayon de lumière naturelle peut être considéré comme résultant de deux rayons de lumière non polarisée, à vibrations rectilignes, dont les portions d'égales vibrations coïncident ; 2° un rayon de lumière non polarisée se comporte en apparence comme s'il était composé de vibrations rectilignes tout à fait égales, se succédant en égal nombre dans tous les azimuths possibles et de telle sorte qu'au passage d'un azimuth à un autre les changements de direction et d'amplitude se font d'une manière uniforme. Nous appellerons *régulier* un rayon que nous supposerons ainsi constitué.

Les deux rayons en lesquels se décompose la lumière naturelle à son entrée dans un spath calcaire, ou dans le cristal de roche, ou dans une feuille de mica, se composent en un nouveau rayon qui ne présente, comme la lumière naturelle, aucune polarité, et qui ne peut pas non plus au moyen du compensateur être changé en lumière rectilignement polarisée. Nous regarderons ce fait comme une preuve en faveur de l'exactitude de notre hypothèse

sur l'essence de la lumière naturelle, si nous pouvons déduire de cette hypothèse qu'en effet la lumière provenant de ces deux rayons ne doit pas présenter de polarité. Pour cela décomposons la lumière incidente en deux faisceaux de rayons non polarisés à vibrations rectilignes et démontrons que l'un d'eux doit redonner de la lumière non polarisée, d'où il suit que tous deux ensemble le font aussi. Soit a l'amplitude d'un rayon régulier que nous pouvons substituer à l'un des composants, et à un certain moment soit α l'azimuth d'une vibration dans ce rayon, azimuth compté à partir d'une des sections principales de la plaque cristalline. Nous décomposons cette vibration en deux y et z suivant ces sections et en posant $\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) = V$, ainsi qu'en négligeant tout affaiblissement nous obtenons pour les rayons sortant du cristal :

$$y = a. \text{Cos.}\, \alpha. \text{Sin.}\, V \qquad z = a\, \text{Sin.}\, \alpha. \text{Sin.}\, (V + \varphi)$$

où φ représente le changement de l'expression V, changement produit par la différence de phase qui s'opère. Si ces composantes tombent maintenant sur un spath calcaire polarisant dont le plan de vibrations est dans l'azimuth β. Nous obtenons pour l'écart du rayon sortant du spath calcaire :

$$s = y\, \text{Cos.}\, \beta + z\, \text{Sin.}\, \beta = a\, [\text{Cos.}\, \alpha\, \text{Cos.}\, \beta\, \text{Sin.}\, V + \text{Sin.}\, \alpha\, \text{Sin.}\, \beta\, \text{Sin.}\, (V + \varphi)]$$

$$= a\, [(\text{Cos.}\, \alpha\, \text{Cos.}\, \beta + \text{Sin.}\, \alpha\, \text{Sin.}\, \beta\, \text{Cos.}\, \varphi)\, \text{Sin.}\, V + \text{Sin.}\, \alpha\, \text{Sin.}\, \beta\, \text{Sin.}\, \varphi.\, \text{Cos.}\, V]$$

$$= a \sqrt{(\text{Cos.}\, \alpha\, \text{Cos.}\, \beta + \text{Sin.}\, \alpha\, \text{Sin.}\, \beta\, \text{Cos.}\, \varphi)^2 + \text{Sin.}^2\, \alpha\, \text{Sin.}^2\, \beta\, \text{Sin.}^2\, \varphi}.\, \text{Sin.}\, (V + \psi)$$

en posant :

$$\text{Tang.}\, \psi = \frac{\text{Sin.}\, \alpha\, \text{Sin.}\, \beta\, \text{Sin.}\, \varphi}{\text{Cos.}\, \alpha\, \text{Cos.}\, \beta + \text{Sin.}\, \alpha\, \text{Sin.}\, \beta\, \text{Cos.}\, \varphi}.$$

Et l'intensité de la lumière émergente est

$$\frac{a^2}{2}(1 + \text{Cos.}\, 2\alpha\, \text{Cos.}\, 2\beta + \text{Sin.}\, 2\alpha\, \text{Sin.}\, 2\beta\, \text{Cos.}\, \varphi).$$

L'azimuth α des vibrations incidentes change continuellement et avec lui par conséquent l'intensité des vibrations qui traversent le spath. Toutefois la somme de ces intensités conserve évidemment la même valeur pendant le temps que α parcourt une fois les azimuths $d\alpha$, $2\, d\alpha$, etc. Si μ représente le nombre des vibrations du rayon régulier dans chaque azimuth nous trouvons pour cette somme :

$$\frac{\mu}{d\alpha} \int_0^\pi \frac{a^2}{2}(1 + \text{Cos.}\, 2\alpha\, \text{Cos.}\, 2\beta + \text{Sin.}\, 2\alpha\, \text{Sin.}\, 2\beta\, \text{Cos.}\, \varphi)\, d\alpha$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{d\alpha} \cdot \mu.$$

En divisant cette valeur par le nombre $\frac{\pi}{d\alpha}\mu$, de toutes les vibrations on

obtient pour l'intensité (moyenne) du rayon la valeur $\frac{a^2}{2}$. Nous voyons donc que l'intensité de la lumière sortant du spath est indépendante de l'azimuth de ce dernier et est moitié de celle de la lumière incidente. La même chose aurait lieu évidemment pour le second faisceau composant de la lumière incidente.

Aucun des deux rayons de lumière non polarisée à vibrations rectilignes en lesquels nous avons décomposé la lumière naturelle, n'offre donc de polarité, il en sera par conséquent de même pour cette dernière. Dove a imité pour une des composantes le fait qui n'était qu'hypothétique dans l'analyse précédente : il faisait arriver sur une lame de mica fixe la lumière qui sortait d'un spath polarisant animé d'un mouvement de rotation rapide et uniforme : cette lumière en sortant du mica se montrait toujours dépourvue de polarisation.

Si de la lumière naturelle traverse une lame cristalline, la nature de ses vibrations changera en général à cause de la variation φ de V. Toutefois ce changement sera annulé pour chaque qualité de lumière, si celle-ci après son passage à travers la première plaque est reçue sur une seconde taillée dans le même cristal, de la même manière que la première, et ayant la même épaisseur, mais dont les sections principales sont tournées de 90° par rapport à celles de la première, comme c'est le cas pour les deux lames de quartz du compensateur. La différence de phases que cause la première plaque est détruite par la seconde, et la lumière sortant de celle-ci, non-seulement est dépourvue de polarisation, comme la lumière naturelle incidente, mais est encore composée identiquement comme elle.

CHAPITRE IX.

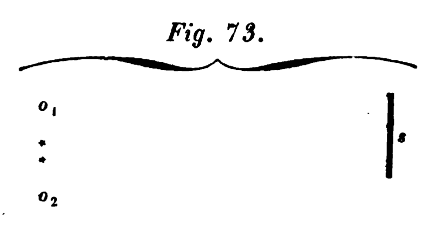
Intensité.

Pour mesure de l'intensité d'une vibration rectiligne, nous avons pris jusqu'à present le carré de son amplitude, et cette supposition s'est trouvée vérifiée par l'explication satisfaisante de phénomènes assez compliqués. Chaque nouveau phénomène lumineux devra nous fournir une nouvelle preuve de cette hypothèse. Mais en particulier il faut démontrer qu'elle s'accorde avec

nos idées élémentaires sur l'intensité, idées très-simples, très-naturelles et non contradictoires. C'est le point que nous allons d'abord examiner.

Soient o_1 et o_2 (fig. 73), deux sources de lumière d'égale intensité, de même couleur, d'une étendue aussi petite que possible, rapprochées tant qu'on pourra, ayant enfin entre elles la plus grande analogie, comme seraient, par exemple, deux petites flammes de bougies voisines, de même éclat, dont on colorerait la lumière par l'interposition d'un verre coloré. Un petit écran s de papier blanc est placé à une distance de o_1 et de o_2 telle que les rayons $o_1 s$ et $o_2 s$ puissent être regardés comme parallèles et perpendiculaires à l'écran s. Dans ce cas nous regardons l'éclairement de s comme double de ce qu'il serait si l'écran ne recevait de lumière que d'une seule source, soit de o_1, soit de o_2. Si aux lumières o on en ajoutait une troisième, une quatrième, etc., on dit que l'éclairement est trois fois, quatre fois, etc., plus grand (1). Cette définition de la force de l'éclairement, de l'intensité de la lumière, est-elle d'accord avec les opinions que nous avons acquises sur sa nature et avec la mesure que nous avons adoptée pour son intensité?

Fig. 73.



Mettons à la place de chacun des rayons de lumière naturelle, émanant des sources o_1 et o_2, deux rayons composants réguliers, et occupons-nous comme fondement de notre théorie de ce que produirait le concours d'un des rayons émanant de o_1 avec un second provenant de o_2. Les amplitudes de ces rayons, dont chacun a la demi-intensité de la lumière naturelle, étant égales aux mêmes distances des sources o_1 et o_2, soit a leur valeur à la face antérieure de l'écran. Soient en outre à un certain moment o_1 et o_2 les écarts d'une molécule d'éther sur l'écran, écarts provenant de l'un et de l'autre rayon.

Représentons ensuite par V l'expression $\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + A)$ pour un rayon et par ψ le changement qu'elle subit en passant à l'autre rayon qui diffère de phase avec le premier, alors à un moment déterminé on a

(1) Lambert pose cette définition, quand il dit : *Cum enim lumen alterum alteri non officiat, patet quotlibet novis superadditis candelis, æquales quoque chartæ superaddi claritatis gradus.* (*Photométrie* § 51.) Nous démontrons ici, que malgré l'interférence des lumières qui a lieu nécessairement, les intensités s'ajoutent simplement, si l'on prend le carré de l'amplitude pour mesure de l'intensité et que par conséquent la définition précédente se trouve ainsi confirmée.

$$o_1 = a \text{ Sin. } V, \qquad o_2 = a \text{ Sin. } (V + \psi).$$

De temps en temps la phase A qui entre dans V change, comme aussi la différence de phase ψ, puisque nous avons supposé l'expression la plus générale pour les vibrations lumineuses en o_1 et o_2, c'est-à-dire, une indépendance complète.

Soient en outre α_1 et α_2 les angles que les directions de o_1 et o_2 forment avec un axe YY' tracé sur la face éclairée de l'écran. Décomposons chacun d'eux suivant YY' et sa direction perpendiculaire ZZ'; en désignant par y la résultante suivant YY' et par z celle suivant ZZ', à la place de o_1 et o_2 on aura :

$$y = o_1 \text{ Cos. } \alpha_1 + o_2 \text{ Cos. } \alpha_2, \qquad z = o_1 \text{ Sin. } \alpha_1 + o_2 \text{ Sin. } \alpha_2$$

qui produiront le même effet que les précédents.

Ces équations subsistent tant que les vibrations ne changent pas dans l'un et dans l'autre rayon, tant que A, ou V, ψ, α_1 et α_2 conservent les mêmes valeurs. Les vibrations y et z se composent en général en vibrations elliptiques dont l'intensité donne la mesure de l'éclairement de l'écran. Dans les expressions de y et de z remplaçons o_1 et o_2 par leurs valeurs, il vient en développant :

$$y = (a \text{ Cos. } \alpha_1 + a \text{ Cos. } \alpha_2 \text{ Cos. } \psi) \text{ Sin. } V + a \text{ Cos. } \alpha_2 \text{ Sin. } \psi \text{ Cos. } V.$$
$$z = (a \text{ Sin. } \alpha_1 + a \text{ Sin. } \alpha_2 \text{ Cos. } \psi) \text{ Sin. } V + a \text{ Sin. } \alpha_2 \text{ Sin. } \psi \text{ Cos. } V.$$

Posons :

$$y = A \text{ Sin. } V + B \text{ Cos. } V \quad \text{et} \quad \sigma = \text{arc Tang. } \frac{B}{A} \text{ de même que}$$

$$z = A' \text{ Sin. } V + B' \text{ Cos. } V \quad \text{et} \quad \sigma' = \text{arc Tang. } \frac{B'}{A'}.$$

Alors on aura :

$$y = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ Sin. } (V + \sigma), \qquad z = \sqrt{A'^2 + B'^2} \text{ Sin. } (V + \sigma').$$

Pour l'intensité des vibrations elliptiques résultant de y et de z, on obtient d'après cela :

$$A^2 + B^2 + A'^2 + B'^2$$

ou ce qu'on trouvera facilement :

$$2 a^2 [1 + \text{Cos. } (\alpha_1 - \alpha_2) \text{ Cos. } \psi].$$

Avec le temps, les directions des écarts o_1 et o_2 changent, par suite les angles α_1 et α_2 et leur différence $\alpha_1 - \alpha_2$; en outre il se peut aussi que la différence de phase ψ ne reste pas la même. On devrait regarder comme une circonstance bien extraordinaire, à cause du nombre excessivement grand de vibrations différentes en direction et en phases, si après un certain temps trop petit, l'expression Cos. $(\alpha_1 - \alpha_2)$ Cos. ψ ne prenait pas toutes les valeurs

possibles tantôt positives, tantôt négatives, comprises entre *o* et l'unité, de telle manière que si *m* représente le nombre de vibrations qui se font dans ce temps là, la somme des intensités pour ce temps aura la valeur moyenne $m\ 2\ a^2$. Mais cette même somme a pour *un* rayon la valeur ma^2, ainsi la moitié de la précédente. Nous concluons donc de là que *deux rayons réguliers également intenses se composent en un rayon également non polarisé d'intensité double. La même chose a lieu pour deux rayons de lumière naturelle de même intensité* qui peuvent être remplacés par deux rayons réguliers d'égale intensité. En employant la même méthode que précédemment aux cas où l'on ajouterait une 3e source, une 4e, etc., on arrive facilement à se convaincre qu'en général *n* rayons de lumière naturelle d'égale intensité se combinent en un seul nouveau rayon de même espèce d'une intensité *n* fois plus grande. Et ainsi se trouve démontré l'accord parfait de notre théorie avec l'idée de l'intensité qu'établissent de simples considérations élémentaires.

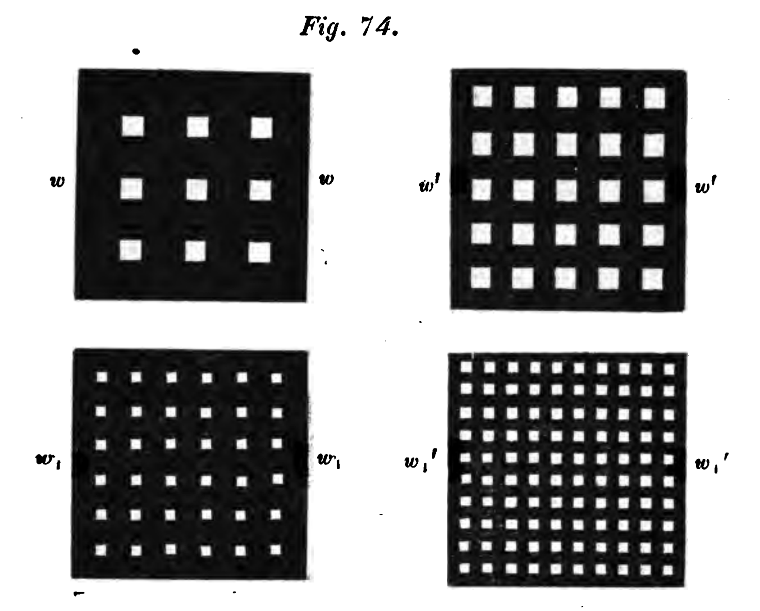
Après avoir reconnu la dépendance qu'il y a entre l'intensité et les quantités qui déterminent une vibration, il est très-important de connaître les lois suivant lesquelles l'intensité d'un faisceau lumineux ou d'une onde change pendant sa propagation. Jusqu'à présent nous avons admis, comme ce qu'il y avait de plus probable, que l'intensité d'une onde plane ou d'un faisceau de rayons parallèles ne s'altère pas pendant sa propagation et c'est ce que nous avons supposé dans nos théories mathématiques. Nous avons donc attribué une amplitude constante dans toute leur étendue aux rayons réguliers théoriques que nous avons dû mettre à la place des rayons réels, afin de pouvoir appliquer le calcul.

Des changements de l'intensité dans le cas de rayons parallèles, on déduit ce qui arriverait pour une onde de forme quelconque ou pour un assemblage quelconque de rayons, de la même manière que nous avons conclu la propagation des ondes quelconques de celle des ondes planes. Voici à peu près la marche à suivre pour résoudre le problème.

Dans la figure 74, *ww* représente une portion d'une onde plane W, qui n'est pas comme celles que nous avons considérées jusqu'à présent, identique dans tous ses points, mais que l'on suppose formée de portions d'ondes séparées, régulièrement arrangées; ces portions sont d'égale grandeur, ont la même couleur et la même intensité, mais sont, quant au reste, les unes par rapport aux autres dans les relations les plus générales. En *w* il y a 9 de ces ondes partielles. De même soit *w'w'* une portion d'une onde W' formée de la même manière, mais qui renferme 25 ondes partielles de même grandeur que celles qui sont dans la précédente. Le rapport des effets produits par *w* et

par w' est évidemment de 9 : 25 (Voyez plus haut). Or ce rapport reste le même si nous diminuons les dimensions des ondes partielles dans le

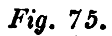
Fig. 74.



même rapport et ensuite si nous disposons ces nouvelles ondes partielles d'une manière analogue, de telle sorte que toujours dans des portions égales des ondes entières, il y en ait, comme dans ww et $w'w'$, des nombres qui soient entre eux dans le rapport de 9 à 25. De cette manière nous obtenons par exemple à la place de ww, et $w'w'$, les portions w_1w_1 et $w'_1w'_1$ dont la première contient 36 ondes partielles et la seconde 100, dans une même étendue superficielle. L'application répétée de la méthode précédente rapproche évidemment toujours de plus en plus les ondes W et W' de deux ondes homogènes dont les intensités seraient comme 9 : 25; attendu que si les ondes partielles sont très-petites et en très-grand nombre deux portions de W et de W' bien que petites, mais d'égale grandeur produiront des effets dans le rapport de 9 : 25 puisque c'est le rapport qui existe toujours entre le nombre des ondes partielles qui sont réunies dans l'une et dans l'autre portion d'onde. Enfin si les ondes partielles atteignent la limite de l'infiniment petit, l'homogénéité de W et de W' est atteinte, et d'après cela le rapport des intensités est représenté par 9 : 25. Il est évident que les raisonnements précédents conservent toute leur généralité quels que soient les nombres que nous

prenions à la place de 9 et de 25. Appliquons-les au cas très-important d'une onde courbe, d'une onde sphérique.

Supposons que du point P, figure 75, parte dans des directions différentes, un grand nombre de petites ondes planes d'égale intensité, disposées aussi régulièrement que possible dans l'espace. Au bout d'un certain temps elles se seront toutes autant éloignées de P chacune dans sa direction, et toucheront, en des points aussi régulièrement distribués que possible, la surface d'une sphère dont le centre serait P. Ces ondes forment alors une onde polyédrique percée à jour, c'est-à-dire que leurs plans suffisamment prolongés se couperaient suivant les angles et les arêtes d'un polyèdre convexe. Le temps croissant, ce polyèdre comme aussi la sphère en question à laquelle il est circonscrit, croissent dans le même rapport que le temps écoulé, tandis que les ondes ne changent ni en direction, ni en grandeur, ni en forme, ni en intensité. Soient K et K' les sphères enveloppées par les ondes à deux moments consécutifs t et t'. Diminuons maintenant les dimensions des ondes en même temps que nous augmentons leur nombre, de manière toutefois qu'au moment t où elles touchent la sphère K deux d'entre elles ne puissent se couper, ce qui ne pourra pas non plus arriver au moment suivant. Il en résultera que les ondes dans leurs différentes positions se rapprocheront de la sphère inscrite et que leur ensemble en présentera à peu près la forme.


Fig. 75.

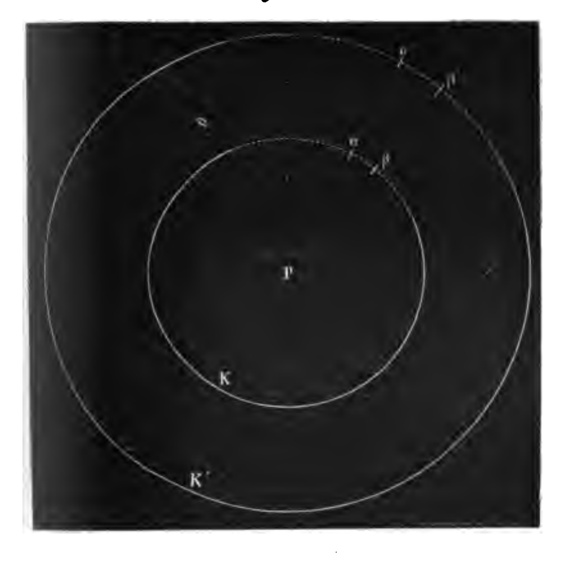


Supposons le cas d'un très-grand nombre d'ondes dont l'ensemble serait disposé très-régulièrement ; soient $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ des portions extrêmement petites des deux enveloppes aux moments t et t', portions limitées par les mêmes rayons (figure 76). Soient n le nombre des ondes élémentaires que contient

$\alpha\beta$, et n' le nombre d'ondes élémentaires dans une partie de $\alpha'\beta'$ ayant la même étendue, on aura le rapport :

$$n : n' = \text{Surf. } \alpha'\beta' : \text{Surf. } \alpha\beta.$$

Fig. 76.



Mais les surfaces de $\alpha\beta$ et de $\alpha'\beta'$ sont entre elles comme les surfaces des sphères inscrites ou comme les carrés de leurs rayons. Représentons ceux-ci par r et r', alors :

$$1)\ n : n' = r'^2 : r^2$$

Comme les parties $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ sont extraordinairement petites, on peut sans erreur sensible les considérer comme planes, et alors d'après les résultats précédents nous aurons très-approximativement :

$$2)\ J : J' = n : n'.$$

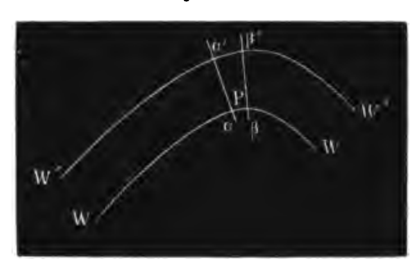
Si J et J' représentent les intensités de l'ensemble des ondes aux moments t et t'. Des équations 1) et 2) on tire enfin :

$$J : J' = r'^2 : r^2.$$

Ce résultat sera d'autant plus exact que les ondes élémentaires seront prises en plus grand nombre et plus petites; il sera même tout à fait rigoureux en passant à la limite. Mais alors l'ensemble des ondes se confond avec la surface sphérique inscrite et forme une onde homogène. Donc, quand des ondes sphériques émanant d'un point lumineux se propagent dans un milieu isotrope, *leur intensité diminue pendant la propagation et est réciproquement proportionnelle au carré du rayon. A deux distances différentes du point lumineux, les intensités des rayons qui en émanent sont inverses des carrés des distances.* Nous remarquerons en passant que la mécanique analytique établit la même loi pour la diminution de l'intensité des rayons sonores divergents, au moins pour de grandes distances au centre sonore. (*Airy's Mathematical tracts. On the undulatory theory of optics,* 1842, p. 259).

Pour présenter le problème de la manière la plus générale, soit J l'intensité d'une onde WW, figure 77, de forme quelconque, au point P, ou plutôt en un élément $\alpha\beta$ de sa surface. Après un certain temps, l'onde s'est transportée en W′W′, en changeant de forme ce qui est le cas le plus général. Pendant ce mouvement les ondes partielles en lesquelles on peut décomposer l'élément $\alpha\beta$, se propagent dans la direction de leur normale, sans du reste éprouver de changement, puisqu'on peut les considérer comme planes, et se trouvent répandues sur l'élément $\alpha'\beta'$ qui est déterminé sur la dernière onde W′W′ par les normales qu'on peut élever aux différents points du contour de $\alpha\beta$. Soit maintenant J′ l'intensité de l'onde W′W′ en un point de son éléments $\alpha'\beta'$, on aura d'après ce qui précède :

Fig. 77.



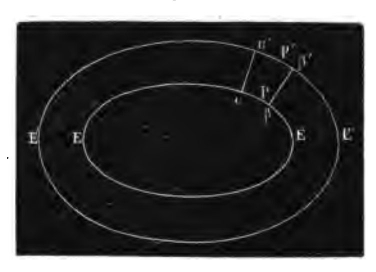
$$J : J' = \text{Surf. } \alpha'\beta' : \text{Surf. } \alpha\beta.$$

C'est maintenant à l'analyse à donner à la loi exprimée par cette proportion la forme qui convient à chaque cas particulier. Nous allons faire cette transformation, sans toutefois pousser les calculs jusqu'au bout, pour le cas suivant.

Question. A un moment déterminé une onde lumineuse a la forme d'un cylindre elliptique et la même intensité en tous ses points. Quelle sera après le temps t la forme de cette onde et comment y sera distribuée l'intensité ?

Soit EE′, figure 78, la base de l'onde dans sa position primitive, et J son intensité. D'après les considérations exposées page 19, l'état vibratoire de l'onde s'est distribué au bout du temps t aux points dont la distance perpendiculaire au cylindre elliptique est vt, v représentant la vitesse de la lumière. Ces points se trouvent évidemment encore sur un cylindre dont l'axe coïncide avec celui du cylindre elliptique, mais dont la base est la courbe E′E′ parallèle à l'ellipse EE et qui en est à la distance vt. Soient en outre P et P′ deux points correspondants du cylindre elliptique et de sa surface parallèle, de

Fig. 78.



manière que PP' est normal aux deux surfaces. Soient ε, ε' les éléments rectilignes correspondants, dans la direction de l'axe sur lesquels se trouvent P et P' et $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ les arcs des bases correspondants à ces éléments. Alors, J' étant l'intensité de l'onde au bout du temps t, au point P', on aura :

$$J : J' = \varepsilon' : \varepsilon.$$

En outre $\varepsilon' : \varepsilon = \text{arc } \alpha'\beta' : \text{arc } \alpha\beta$

donc $J : J' = \text{arc } \alpha'\beta' : \text{arc } \alpha\beta.$

Puisque maintenant d'après l'hypothèse, α et α' aussi bien que β et β' se correspondent et qu'alors $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$ sont perpendiculaires sur les deux ondes, si ρ et ρ' représentent les rayons de courbure des courbes EE, E'E' aux points P et P' on aura :

$$\text{arc } \alpha'\beta' : \text{arc } \alpha\beta = \rho' : \rho$$

et aussi $J : J' = \rho' : \rho$

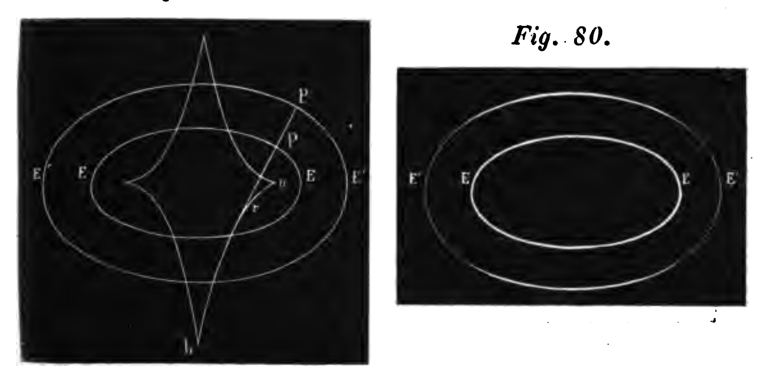
d'où l'on déduit :

$$J' = \frac{\rho}{\rho'} J = \frac{\rho}{\rho + vt} J = \frac{1}{1 + \frac{vt}{\rho}} J.$$

D'après cela pour avoir l'intensité de l'onde en un point P' au bout du temps t on mène par le point P' une tangente au cadran ab de la développée de l'ellipse EE. Soit r le point de contact de la tangente et p son intersection avec l'ellipse, le quotient $\frac{rp}{rP'}$, représente le rapport de l'intensité cherchée de l'onde à l'intensité primitive.

Dans la figure 80, EE et E'E' représentent de nouveau les bases des ondes

Fig. 79. *Fig. 80.*

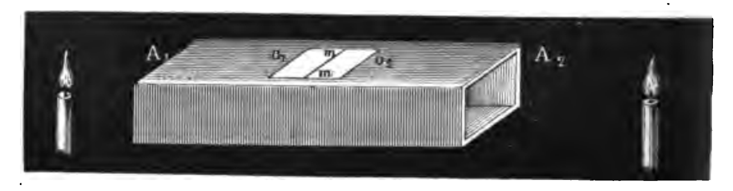


aux deux instants considérés, et l'épaisseur de la courbe est en chaque point proportionnelle à l'intensité. Comme l'intensité de l'onde en tous les points

d'une arête du cylindre est la même, la figure nous donne une image des rapports d'intensité et de la forme de l'onde à chacun des deux moments.

Pour établir par expérience la loi de la diminution de l'intensité pour les ondes courbes les plus ordinaires, savoir les ondes sphériques, on se sert avec avantage du *photomètre* de Ritchie. Il consiste en une boîte prismatique à quatre faces A_1 A_2 (fig. 81), ouverte aux deux extrémités et contenant en

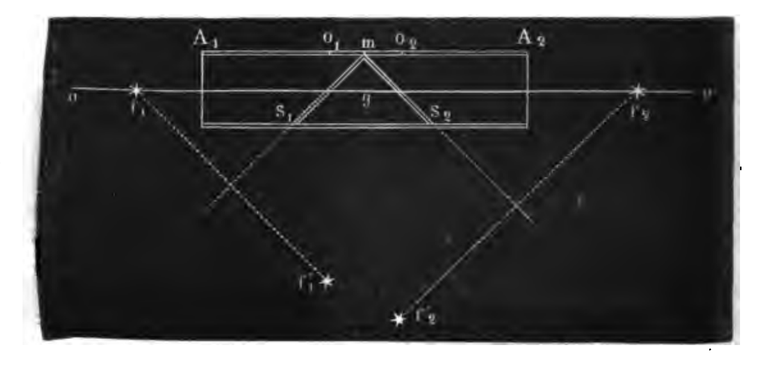
Fig. 81.



son milieu deux miroirs s_1 et s_2 inclinés de 45° sur l'axe de la boîte. Ces miroirs se touchent par une de leurs arêtes suivant la ligne moyenne *mm* d'une ouverture rectangulaire pratiquée à la paroi supérieure du tube et fermée au moyen d'une mince feuille de papier huilé. Les rayons lumineux qui tombent sur le miroir s , à peu près dans la direction de l'axe *aa*, sont réfléchis vers le haut et éclairent la moitié mmo_1 du papier huilé ; de même la moitié mmo_2 sera éclairée par les rayons réfléchis par le miroir s_2.

Si maintenant aux points f_1 et f_2 de l'axe *aa*, figure 82, on place deux

Fig. 82.



petites lumières intenses, tout se passe comme si les moitiés o_1 et o_2 du papier huilé étaient éclairées par les rayons des images f'_1 et f'_2 produites par les miroirs. Supposons que o_1 paraisse plus éclairé que o_2. Si l'on éloigne la

flamme f_1 le long de l'axe, on remarque une diminution graduelle dans l'éclat de o_1. Parvenu en un certain point de l'axe, la lumière f_1 produira sur o_1 le même éclairement que f_2 sur o_2. Si l'on éloigne f_1 au delà de ce point, o_2 présentera un plus grand éclat. On détermine alors avec le plus d'exactitude possible la position de f_1 pour laquelle les deux moitiés du papier huilé ne présentent aucune différence appréciable dans leur éclairement. Supposons que cela arrive quand f_1 est à une distance d du milieu g de l'instrument. Enfin on choisit plusieurs autres lumières qui à la distance d donnent le même éclairement au papier huilé et qui par conséquent ont la même intensité que f_1. Alors on transporte f_1 successivement aux distances $2\,d$, $3\,d$, etc. etc., et chaque fois on lui ajoute d'autres lumières d'égale intensité jusqu'à ce que o_1 possède le même éclat que o_2. On trouve qu'à la distance $2\,d$, il faut ajouter trois nouvelles lumières, il en faut ajouter 8 à la distance $3\,d$. Il suit de là qu'une lumière à la distance d éclaire autant que quatre lumières de même éclat à la distance $2\,d$, autant que neuf à la distance $3\,d$, en général autant que n^2 lumières égales à la distance nd : ou en d'autres termes que l'intensité d'une flamme augmente ou diminue proportionnellement à la valeur réciproque du carré de la distance. C'est une confirmation de la loi que nous avons trouvée pour le cas d'un point lumineux, autant toutefois que la lumière produite par un ensemble de points lumineux, comme celle d'une flamme, donnera à une grande distance la même diminution d'intensité que celle d'un point unique. Et en effet soient p_1, p_2.... (fig. 83), des points lumineux dont les

Fig. 83.

intensités à la distance 1, sont i_1, i_2.... L'intensité de l'éclairement en un point P est alors $\frac{i_1}{(p_1\mathrm{P})^2} + \frac{i_2}{(p_2\mathrm{P})^2} + \ldots$ Or si l'espace dans lequel sont rassemblés les points lumineux est très-petit par rapport à leur distance au point P, on peut sans erreur sensible remplacer dans l'expression de cette intensité, les distances $p_1\mathrm{P}$, $p_2\mathrm{P}$.... par la distance $p_n\mathrm{P}$ du point P à un point moyen, laquelle mesurera celle de P à l'ensemble de tous les points lumineux. L'expression de l'intensité de la lumière au point P sera alors :

$$(i_1 + i_2 + i_3 + \ldots\ldots) \frac{1}{(p_n\mathrm{P})^2}$$

et on voit qu'elle est proportionnelle à la réciproque du carré de la distance de l'espace lumineux au point P.

CHAPITRE X.

Lumière partiellement polarisée.

Ce n'est que dans des cas très-rares, qu'il nous est donné d'admirer dans la nature l'éclat des couleurs homogènes : la plupart du temps nous ne percevons que des mélanges des diverses lumières et qui diffèrent non-seulement en qualité, mais aussi en polarisation. La lumière que nous envoient les corps célestes lumineux par eux-mêmes, et parmi eux en particulier le soleil, n'offre dans son état naturel aucune trace de polarisation. Mais aussitôt qu'elle rencontre un corps sous une incidence quelconque autre que l'incidence perpendiculaire ou rasante, la partie réfléchie, qui rend le corps visible avec sa couleur propre, aussi bien que la portion réfractée quand le corps est transparent, présentent une polarisation. Celle-ci provient de ce que par la réflexion ou la réfraction, quand bien même elles sont imparfaites à cause du défaut de poli ou de transparence des corps, la lumière primitive non polarisée se change en un mélange de lumière naturelle non polarisée et de lumière polarisée, mélange qu'on appelle *lumière polarisée en partie* ou *partiellement polarisée.* Dans beaucoup de cas cette polarisation peut être reconnue au moyen d'instruments qui en décèlent la moindre trace et qu'on nomme, à cause de cela, des *polariscopes.* La construction de ces instruments repose sur les propriétés optiques des corps cristallisés et ne peut pas encore être exposée ici. Cependant on est à même déjà de reconnaître la polarisation de ce mélange au moyen d'un spath calcaire, surtout s'il est monté comme dans la loupe appelée *dichroscopique*, qui peut, outre sa destination primitive et particulière pour étudier les couleurs produites par les corps cristallisés, servir aussi de polariscope. La loupe dichroscopique, imaginée par le minéralogiste allemand Haidinger, est construite de la manière suivante. Un cristal de spath d'Islande limité par ses faces naturelles de clivage (fig. 84), est fixé au moyen d'un anneau de liége *kk* dans un petit tube *hh* de manière que ses quatre arêtes soient parallèles à l'axe de ce dernier. Le tube porte à une de ses extrémités une plaque métallique *aa*,

percée dans l'axe d'une petite ouverture circulaire *o*. A l'autre extrémité, se trouve emboîté un second tube plus petit portant une lentille bi-convexe achromatique et fermé à l'extérieur par une plaque *aa'* percée d'une ouverture oculaire. Nous savons déjà que les rayons arrivant par l'ouverture *o* et tombant sur le spath parallèlement à l'axe de l'instrument, sont partagés en deux faisceaux de rayons parallèles. Si le rapport entre le diamètre de l'ouverture et l'épaisseur du spath est convenable, les deux faisceaux sont séparés l'un de l'autre. L'œil placé derrière *a'a'* verra donc nécessairement, pour une position convenable de la lentille, deux images de l'ouverture *o* nettement séparées : les lumières qui produisent ces images sont polarisées en ligne droite et dans deux plans perpendiculaires : le plan des vibrations correspondantes à une image E passe par la ligne qui joint les centres des deux images, celui de la seconde O est perpendiculaire au premier. Si la loupe est tournée vers une source de lumière non polarisée, les deux images paraissent de même éclat, de quelque manière qu'on tourne la loupe autour de son axe. Mais si la lumière incidente est polarisée en ligne droite, les deux images n'auront le même éclat que quand la ligne qui joint leurs centres fera un angle de 45° avec le plan des vibrations : puis en partant de cette position si l'on tourne l'instrument vers la droite, par exemple, une des images, soit O, deviendra de plus en plus brillante, tandis que l'autre deviendra plus sombre. L'image O atteint son plus grand degré d'intensité et l'image E disparaît après une rotation de 45°, car alors la ligne qui joindrait le centre des deux images sera perpendiculaire au plan d'oscillation de la lumière incidente. Le rapport d'intensité des images est inverse si l'on tourne dans le sens opposé. (Voyez fig. 85).

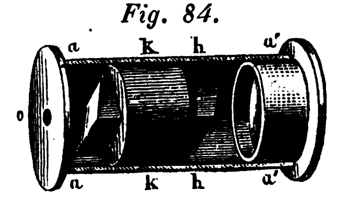


Fig. 84.

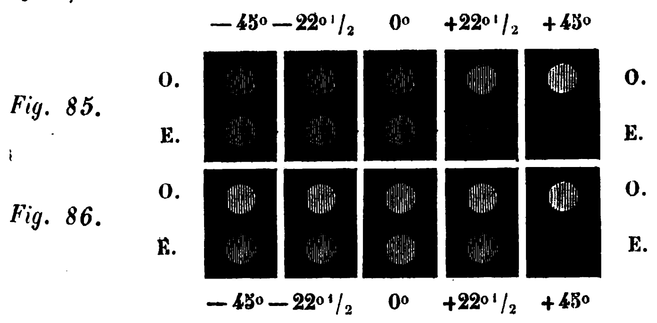


Fig. 85.

Fig. 86.

Les changements que l'on remarque dans l'éclat des images, quand on fait

tomber sur la loupe un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée ne s'accordent ni avec les apparences que donne la lumière non polarisée, ni avec celles de la lumière polarisée en ligne droite. Tourne-t-on par exemple la loupe vers un point du ciel sans nuage, distant du soleil d'environ 90°, ou regarde-t-on avec elle dans une direction inclinée sur un corps imparfaitement réflecteur, comme une surface de bois polie, le rapport d'intensité des deux images change bien pendant qu'on tourne la loupe, mais jamais l'une d'elles ne disparaît. Pour une certaine position l'éclat des deux images est le même, et si à partir de là on tourne la loupe dans un certain sens, l'intensité d'une image diminue graduellement, et celle de l'autre augmente. Après avoir tourné de 45°, celle-là sans disparaître complétement atteint un minimum d'intensité, et celle-ci un maximum. C'est l'inverse si l'on tourne en sens contraire. Voyez figure 87. En même temps dans beaucoup de cas on re-

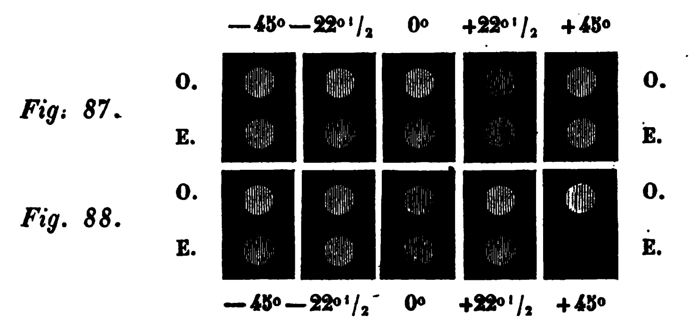


Fig. 87.

Fig. 88.

marque une coloration des images, coloration qui change si l'on tourne la loupe. Mais ici nous ne ferons attention qu'au changement d'intensité, qui peut être du reste remarqué quand bien même il y aurait coloration, et nous renvoyons pour celle-ci au *Répertoire d'optique moderne* de Moigno, II, 547; IV, 1437.

La différence entre le maximum et le minimum observés varie d'une multitude de manières avec la lumière étudiée. Si l'on fait arriver, par exemple, sur une lame polie de verre noir, un faisceau de rayons d'intensité moyenne et sous une incidence de 54° et si l'on observe la lumière réfléchie, on verra que lorsqu'on amènera la ligne qui joint les images dans le plan d'incidence, l'image E disparaîtra, tandis qu'après une rotation de 90° l'image O cessera d'être visible. Mais il serait prématuré d'en conclure la polarisation rectiligne de la lumière réfléchie. En effet si l'on fait réfléchir les rayons directs du soleil et si l'on cache l'image O, alors l'image E apparaît, mais toutefois avec un éclat très-faible : ainsi, bien que celle-ci existe réellement, elle échappe à l'œil à

cause de sa faible intensité (1). En observant de même la lumière réfléchie imparfaitement par une feuille de papier blanc, on remarque, comme dans le cas de la lame de verre, que la plus grande différence d'éclat entre les deux images a lieu quand leur ligne de jonction est dans le plan d'incidence ou lui est perpendiculaire, la différence est très-petite il est vrai, mais pourtant appréciable.

Si avant d'arriver à l'œil, la lumière réfléchie par le verre ou la feuille de papier traverse un simple spath d'Islande, elle éprouve les mêmes changements d'intensité que l'une ou l'autre des images de la loupe dichroscopique. La lame de verre paraît toute noire pour une lumière moyennement intense, si le plan d'oscillation du spath coïncide avec le plan d'incidence; elle devient de plus en plus éclairée à mesure que l'angle de ces plans se rapproche de l'angle droit. En employant le papier on ne pourrait pas ou à peine reconnaître ces changements, c'est qu'ici la plus grande et la plus faible intensité différant très-peu l'une de l'autre, l'œil ne peut saisir la faible différence qu'il y a entre les impressions que produit séparément chacune d'elles. Mais si ces impressions ont lieu en même temps, alors une comparaison exacte est possible, et c'est précisément ce qui arrive avec la loupe dichroscopique; aussi est-ce en cela que consiste l'avantage qu'elle a sur le simple spath.

La polarité, que l'on reconnaît dans la lumière partiellement polarisée conduit à distinguer dans celle-ci deux plans de symétrie perpendiculaires entre eux. A cause de sa ressemblance avec la lumière polarisée en ligne droite, nous choisirons comme *plan de polarisation partielle* celui de ces plans qui coïncide avec la section principale de la loupe dichroscopique, quand l'image O est à son maximum d'éclat et l'image E à son minimum.

La lumière polarisée elliptiquement examinée à la loupe dichroscopique se comporte absolument de la même manière que la lumière partiellement polarisée, et dans celle-ci, le plan de polarisation partielle se confond avec la seconde section principale de la lumière polarisée elliptiquement, c'est-à-dire, avec le plan de symétrie parallèle au petit axe de la trajectoire. On en trouve facilement la raison dans les considérations exposées page 106 et suivantes. Mais la manière dont ces deux sortes de lumières se comportent au compensateur établit entre elles une distinction nette, qu'on peut se dispenser de rechercher en remontant à leur origine. En effet la lumière polarisée elliptiquement peut à l'aide du compensateur, comme nous l'avons montré, être transformée en lumière polarisée en ligne droite; tandis que *cette propriété*

(1) Voyez page 115.

manque complétement à la lumière partiellement polarisée. Ainsi donc cette dernière ne saurait en aucune façon être confondue avec toutes celles que nous avons examinées jusqu'à présent.

Pour nous éclairer sur la nature de cette lumière partiellement polarisée, nous allons examiner sa formation dans un cas particulier, et cela nous fournira en outre un nouveau moyen de la reconnaître.

Dans une topaze enfumée, variété brune de cristal de roche, on taille une plaque épaisse dont les faces sont parallèles à l'axe principal cristallographique. Perpendiculairement à cette face on dirige un faisceau de rayon de lumière naturelle et homogène : la partie qui sort de la plaque présente la polarisation partielle, parallèlement à l'axe du cristal. Les images de la loupe dichroscopique présentent le maximum et le minimum d'intensité si leur ligne de jonction est parallèle ou perpendiculaire à cet axe, et dans le premier cas l'image O paraît dans son maximum d'éclat. La topaze enfumée présente exactement le même indice de réfraction que le cristal de roche. La plaque partage donc, comme le ferait une plaque de cristal de roche de même épaisseur et taillée dans la même direction, les vibrations incidentes en deux séries de vibrations linéaires *o* et *e*; celles-ci sont parallèles à l'axe du cristal, tandis que les premières lui sont perpendiculaires. Mais la différence remarquable qu'il y a entre les deux minéraux, c'est que la topaze enfumée affaiblit plus la lumière qui la traverse que le cristal de roche, et en particulier diminue dans une proportion bien plus forte les vibrations *e* que les vibrations *o*. Nous pouvons nous en convaincre pleinement en plaçant la plaque devant notre œil et en regardant à travers au moyen de la loupe dichroscopique une source de lumière naturelle, comme, par exemple, un nuage blanc. Dans cette position de la plaque, les rayons des images O et E sont séparés par la loupe qu'ils traversent. L'apparence serait la même si la plaque était derrière la loupe dichroscopique : l'image dont les vibrations sont parallèles à l'axe du cristal paraît dans son minimum d'éclat, l'autre dans son maximum. Dans leur passage à travers le cristal les vibrations de la première sont donc plus affaiblies que celles de la dernière (1).

(1) On remarque un semblable rapport d'absorption, dans presque tous les milieux hétérotropes colorés. Les variétés vertes foncées et brunes de tourmalines qui cristallisent comme la topaze enfumée en prismes à 6 pans, éteignent les vibrations perpendiculaires à l'axe, en telle proportion qu'une plaque de faible épaisseur taillée parallèlement à l'axe ne laisse passer que les vibrations parallèles à l'axe, et par conséquent peut être employée comme polarisateur.

La lumière partiellement polarisée par la topaze enfumée consiste ainsi en deux rayons d'inégale intensité polarisés rectilignement et à angle droit. La direction des vibrations du rayon le moins intense est parallèle à l'axe du cristal et à la direction de la polarisation partielle. Ces deux composantes linéaires ont du reste entre elles le rapport le plus général, comme il a lieu pour les composantes de même intensité de la lumière naturelle. En général nous attribuons à la lumière partiellement polarisée une composition analogue à celle que nous avons admise pour la lumière naturelle, et dans chaque cas de polarisation partielle, on pourra facilement déterminer les rapports des composantes quand on aura les données nécessaires. On peut appliquer par exemple à la polarisation par réflexion, et presque sans y rien ajouter, les considérations auxquelles nous avons été conduit par la polarisation partielle à l'aide de la topaze enfumée. C'est ainsi que dans le cas de la réflexion, on a vu que lorsque le rayon incident ne présente aucune polarisation, le rayon réfléchi est aussi formé de deux rayons polarisés à angle droit, d'inégale intensité et dont les éléments sont dans les rapports les plus généraux. La direction des vibrations du rayon le plus intense est perpendiculaire au plan d'incidence.

Il nous semble superflu de démontrer par le calcul, que la composition que nous attribuons à la lumière partiellement polarisée suffit, et au delà, pour expliquer les phénomènes qu'elle présente. L'existence de *deux* composantes établit la différence avec la lumière polarisée en ligne droite, la différence d'intensité de ces composantes la distingue de la lumière naturelle, et leur relation toute générale, d'après laquelle le rapport des amplitudes et la différence de phases changent continuellement, explique la manière dont elle se comporte au compensateur et sa différence avec la lumière elliptiquement polarisée.

A cause de ce rapport général qui existe entre les composantes de la lumière partiellement polarisée, les vibrations devront être elliptiques comme dans la lumière naturelle, mais voici en quoi consiste la différence qui existe entre ces deux espèces de lumières, quant à leur mode de vibration. Lorsqu'un rayon de lumière naturelle traverse une plaque de quartz, il est composé à sa sortie comme le rayon incident et si nous considérons en particulier une vibration on pourra la décomposer en deux vibrations linéaires, l'une d'amplitude Z parallèle à l'axe du cristal, et l'autre d'amplitude Y dans une direction perpendiculaire. Comparons à ces composantes, celles qui correspondent à la même vibration, quand la lumière naturelle a traversé une plaque de topaze enfumée, de même épaisseur que le quartz et taillée dans la même direction. Il est clair, qu'ici la composante perpendiculaire à l'axe du cristal présente

une amplitude moindre que dans le cristal de roche, et si on la représente par y, on aura en représentant par μ une fraction proprement dite,

$$y = \mu Y.$$

La composante parallèle à l'axe a éprouvé, comme nous l'avons vu, un affaiblissement encore plus considérable en se propageant dans le cristal. Soit z son amplitude et v une nouvelle fraction proprement dite, on aura

$$z = \mu v Z.$$

D'après cela pour obtenir la trajectoire de la vibration pour la topaze enfumée, il nous faudra diminuer maintenant les coordonnées y de la trajectoire pour le cas du cristal de roche dans le rapport $1 : \mu$ et les z dans le rapport $1 : \mu v$. La même chose aura lieu évidemment pour toute autre vibration et il en résultera que les dimensions des trajectoires diminuent en passant de la lumière naturelle à la lumière partiellement polarisée et que leurs petits axes se rapprochent de la direction de la polarisation partielle. Soit, par exemple, $\mu = \frac{2}{3}$ et $v = \frac{1}{2}$, on obtient alors à la place de la trajectoire elliptique EE, la trajectoire E'E' (fig. 89), à la place de l'oscillation circulaire KK (fig. 90) et de l'oscillation rectiligne LL (fig. 91), l'oscillation elliptique EE et

Fig. 89.

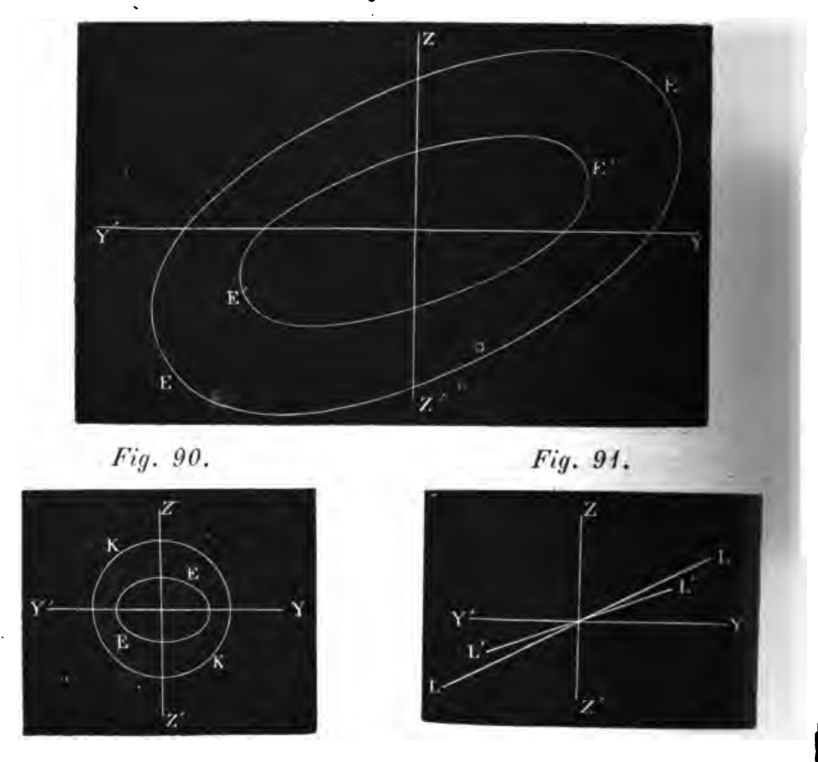


Fig. 90. *Fig. 91.*

l'oscillation rectiligne L'L'. Le nombre ν qui indique le rapport des coëfficients d'affaiblissement de o et de e change du reste de valeur d'un cristal à l'autre, de même que dans un seul et même cristal il varie avec la couleur.

Dans la lumière partiellement polarisée de la topaze enfumée nous pouvons, à la place de la vibration perpendiculaire à l'axe du cristal, en supposer deux autres dirigées de la même manière, dont l'une aurait l'amplitude $y_1 = \mu \nu$ Y, tandis que celle de l'autre serait $y_2 = (\mu - \mu\nu)\,Y = \mu\,(1 - \nu)\,Y$. De même que dans le cristal de roche, les vibrations dont les amplitudes sont Y et Z se composent en lumière non polarisée, de même aussi dans la topaze enfumée, les vibrations avec les amplitudes y_1 et z donneraient de la lumière naturelle si elles existaient seules : mais à elles s'ajoutent encore des vibrations avec l'amplitude y_2 dont la direction est perpendiculaire au plan de polarisation partielle. D'après cela nous voyons que *la lumière partiellement polarisée peut être considérée comme un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée rectilignement dont le plan de polarisation se confond avec le plan de polarisation partielle.*

Ainsi qu'on l'a fait pour la lumière naturelle, on a imité la lumière partiellement polarisée par la rotation d'un rayon polarisé en ligne droite. Mais pour pouvoir reconnaître dans les résultats de cette recherche l'accord parfait avec la théorie, nous allons examiner la transformation qu'éprouve un rayon lumineux régulier par la polarisation partielle.

Fig. 92.



Supposons qu'un rayon régulier tombe sur une plaque de cristal de roche, qui produit une différence de phases multiple de la longueur d'onde, alors la lumière qui sort de la plaque est également régulière. Soient (fig. 92), ca_0, ca_1, etc., les azimuths consécutifs et les amplitudes des vibrations qui composent cette dernière. Les points a_0, a_1...... sont alors sur un cercle dont le centre est le point d'émergence c de l'axe du rayon. Ce même rayon régulier tombe maintenant sur une plaque de topaze enfumée de même épaisseur que celle de cristal de roche. Si la plaque de topaze affaiblissait autant les vibrations e que les vibrations o, il en sortirait de nouveau un rayon également régulier, ayant seulement toutefois une intensité moindre que celui qui sort du cristal

de roche. Supposons que l'on ait $ca_0' : ca_0 = \mu : 1$, ca_0', ca_1'.... seraient les amplitudes de ce rayon, et les points a_0', a_1'.... seraient de nouveau sur un cercle. Mais maintenant les oscillations parallèles à la direction cZ de l'axe du cristal, étant affaiblies dans le rapport de $1 : v$ plus fortement que les oscillations o, les ordonnées z, des trajectoires ca', etc. doivent être diminuées dans ce rapport pour obtenir les azimuths et les amplitudes du rayon qui sort réellement du cristal enfumé. On obtient alors à la place de ca_1', ca_2', etc., les trajectoires ca_1'', ca_2''..... qui sont évidemment les rayons d'une ellipse dont le grand axe est $ca_0'' = \mu . ca_0$ et le petit axe, $cb'' = \mu \, \nu \, ca_0$. Ainsi après avoir traversé le cristal enfumé, les azimuths s'éloignent de la direction de l'axe du cristal symétriquement des deux côtés : les trajectoires sont plus rapprochées les unes des autres des deux côtés de la direction perpendiculaire à cet axe. En même temps l'amplitude augmente graduellement de grandeur en passant de l'axe à la direction perpendiculaire. On voit facilement d'après cela qu'une de ces circonstances seule indique déjà une polarisation partielle. En effet, un rayon consistant en vibrations toutes également intenses, tombant en égal nombre dans des azimuths distribués comme dans la figure 93, doit produire l'apparence d'une polarisation partielle dans la direction cb. Car si on le partage en deux composants dont les directions des vibrations sont ca_0 et cb, le premier a une intensité plus grande, mais tous deux sont entre eux dans la relation la plus générale, puisque nous n'avons rien supposé de particulier, quant au rapport mutuel des vibrations. De même un rayon, dont les vibrations sont dans des azimuths ca_0, ca_1..... (fig. 94), régulièrement distribués, mais dont les amplitudes sont d'autant plus grandes que la trajectoire se rapproche de ca_0, doit paraître partiellement polarisé dans la direction cb.

Fig. 93.

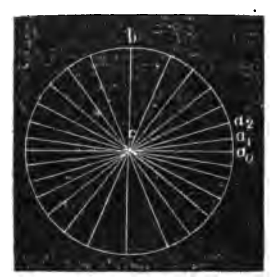
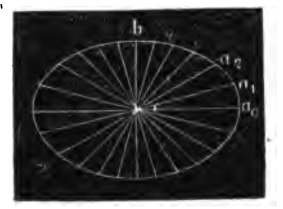


Fig. 94.



Enfin il est encore évident que la polarisation partielle se manifestera si dans les azimuths régulièrement distribués ca_0, ca_1.... il y a d'autant plus de vibrations que celles-ci s'écartent d'une direction fixe, par exemple : cb, qui sera la direction de la polarisation partielle. On peut facilement imiter cette distribution des vibrations.

Faisons tourner, comme Dove l'a fait (page 124) (1), un rayon polarisé en ligne droite, de telle manière que la vitesse angulaire de son plan d'oscillation augmente graduellement à partir d'une position déterminée, jusqu'à la position perpendiculaire, puis diminue ensuite de la même manière, pour augmenter de nouveau et ainsi de suite, alors dans un azimuth déterminé pendant plusieurs rotations, il y a d'autant plus de vibrations que cet azimuth est plus rapproché de la position du plan d'oscillation correspondant à l'écart dû à la plus petite vitesse angulaire. Il devra donc se manifester une polarisation partielle dans la direction de la plus grande vitesse angulaire, ce que l'on observe en effet.

La lumière partiellement polarisée que nous avons considérée jusqu'à présent peut être regardée comme un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée en ligne droite. Une espèce plus générale de polarisation partielle consisterait en un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée elliptiquement et nous devrions regarder la polarisation rectiligne partielle, comme un cas particulier de cette polarisation elliptique partielle. On obtient en effet celle-ci en faisant arriver de la lumière polarisée partiellement en ligne droite sur le compensateur. La portion de lumière naturelle qui entre dans celle-là comme composante, ne change pas de nature, mais la portion polarisée en ligne droite se change en général en lumière polarisée elliptique, ou acquiert en particulier la polarisation circulaire, ou de nouveau la polarisation rectiligne. La lumière qui sort du compensateur est donc un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée elliptiquement, ou circulairement, ou en ligne droite. On peut imiter également les apparences de la lumière partiellement polarisée elliptiquement par une rotation non uniforme d'un rayon polarisé elliptiquement.

Au moyen de la loupe dichroscopique, on ne peut pas distinguer la lumière partiellement polarisée elliptiquement de la lumière partiellement polarisée en ligne droite, dont la direction de polarisation est parallèle au petit axe de la trajectoire dans la portion polarisée elliptiquement. Cela tient évidemment à ce que la lumière partiellement polarisée elliptiquement peut se décomposer en deux composantes polarisées en ligne droite et à angle droit dont la plus intense a pour plan d'oscillation la section principale de la partie polarisée elliptiquement dans la lumière partiellement polarisée elliptiquement. Si un

(1) *Sur la recomposition de la lumière blanche à l'aide des couleurs complémentaires et sur les apparences optiques que présentent les appareils de polarisation animés d'un mouvement de rotation. Annales de Poggendorff, LXXI.*

rayon de lumière partiellement polarisé elliptiquement arrive sur le compensateur de manière que ses plans de symétrie se confondent avec les sections principales de cet instrument, alors pour une différence de phases de $\frac{1}{4}$ de longueur d'onde, la portion polarisée elliptiquement du rayon, prendra la polarisation rectiligne. Le plan d'oscillation de la lumière compensée forme un angle plus grand ou plus petit avec les sections principales du compensateur, de sorte que les plans de symétrie tournent de cet angle par la compensation. D'après cela on peut distinguer cette espèce de lumière de la lumière polarisée partiellement en ligne droite, qui conserve pour un même passage à travers le compensateur une même direction de polarisation. On peut reconnaître absolument de la même manière la lumière partiellement polarisée circulairement que la loupe dichroscopique ne permettrait pas de distinguer de la lumière naturelle.

L'intensité de la lumière partiellement polarisée sera mesurée par la somme des intensités de deux composantes quelconques polarisées à angle droit, ou par la somme de l'intensité de la lumière naturelle et de la lumière polarisée qui la compose. *Le rapport de l'intensité de la lumière polarisée à celle de la lumière naturelle est la mesure de la polarisation partielle.*

Bien qu'on puisse encore imaginer d'autres espèces de composition d'un rayon lumineux que celles que nous venons de considérer, elles offrent trop peu d'intérêt pour nécessiter de nouveaux éclaircissements. De même, ayant bien compris tout ce qui précède, il sera facile de se rendre compte de ce qui arriverait, si au lieu de la lumière monochromatique que nous avons toujours supposée pour plus de simplicité, on avait affaire à un mélange de rayon différemment colorés et d'intensités diverses. On considère alors chaque espèce de lumière isolément, puis ensuite au moyen de la règle de Newton (page 81), on conclut l'effet total produit par l'ensemble des rayons. Si l'on voulait approfondir dans ce cas plus général les modifications que présentent les phénomènes rapportés plus haut, il faudrait pénétrer dans la partie plus élevée de l'optique, ce à quoi cet ouvrage ne fait que préparer.

CHAPITRE XI.

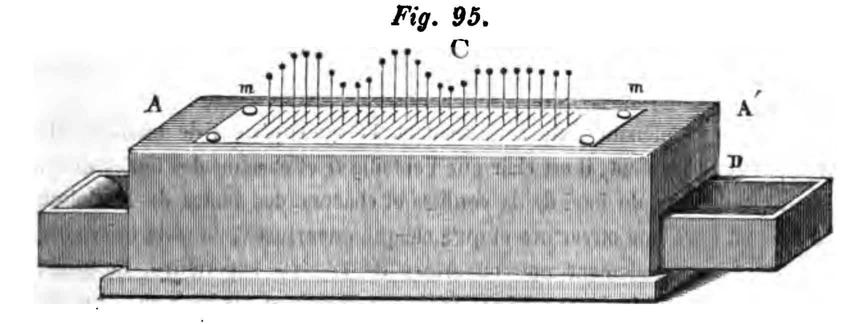
Appareils facilitant l'étude de la lumière polarisée.

Lorsqu'on commence l'étude de la théorie de la lumière on a souvent de grandes difficultés à comprendre le mouvement des molécules d'éther d'un

rayon lumineux ; aussi pour les aplanir, on a imaginé des modèles qui rendent ce mouvement sensible dans l'étendue d'un rayon lumineux qui ne comporte que des vibrations tout à fait égales, comme par exemple, dans le mouvement représenté par l'équation II, page 71, ou par l'ensemble des équations 1) et 2) page 82. De toutes ces machines à ondes, nous décrirons celle que fit construire le physicien allemand Plucker.

Sur la face supérieure C, figure 95, d'une caisse AA' ayant la forme d'un

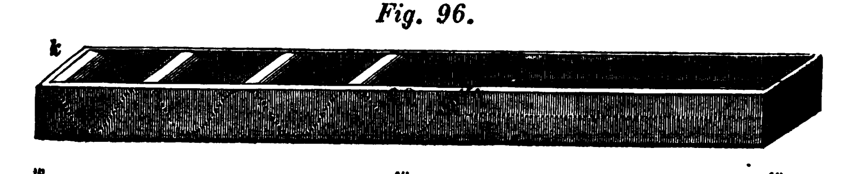
Fig. 95.



long parallélépipède rectangle, est enchassée une plaque de laiton *mm* sur laquelle sont pratiquées des fentes rectilignes, également espacées et parallèles au petit côté de la boîte. Celle-ci est partagée au moyen d'une cloison médiane D en étage supérieur et étage inférieur. Dans cette cloison se trouvent également des fentes comme sur la face C de manière qu'à chaque fente de cette dernière correspond verticalement au-dessous une des fentes parallèles de D.

Dans l'étage inférieur un tiroir représenté, figure 96, peut se mouvoir facile-

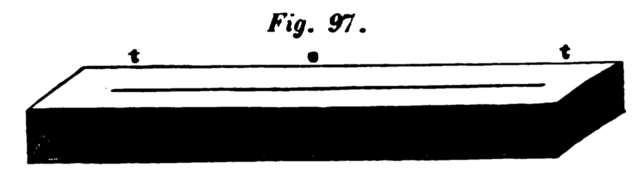
Fig. 96.



ment d'un côté ou de l'autre : il a également la forme d'un parallélépipède rectangle ; en haut il est ouvert et dans ses côtés est enchassée une feuille de laiton polie, contournée d'abord en surface onduleuse, puis ensuite étendue en surface plane. Cette feuille a la forme d'un cylindre, dont la génératrice est parallèle à l'arête *k* ; la directrice est, dans la portion w_1w_2, une ligne d'onde prolongée dans la partie w_2w_3 en une ligne droite qui coïncide avec le prolongement de l'axe de la ligne d'onde. Ainsi de w_1 à w_2 la feuille de

laiton est contournée en surface onduleuse mais de w_2 à w_3 elle est plane. Dans l'étage supérieur on peut glisser la coulisse, figure 97, qui est creuse, et dont le fond et la face supérieure *o* sont percés juste au milieu d'une fente rectiligne *tt*.

Fig. 97.



Plaçons maintenant cette coulisse dans l'étage supérieur de manière à le remplir complétement, il est clair que l'entaille *tt* et chacune des fentes de C, ainsi que la fente du fond de la coulisse et chacune des fentes de la cloison D laissent libre une ouverture et qu'à chaque ouverture de la série inférieure correspond verticalement une ouverture de la série supérieure. Le tiroir, figure 96, étant placé dans l'étage inférieur depuis w_2 jusqu'à w_3, on fait

Fig. 98.

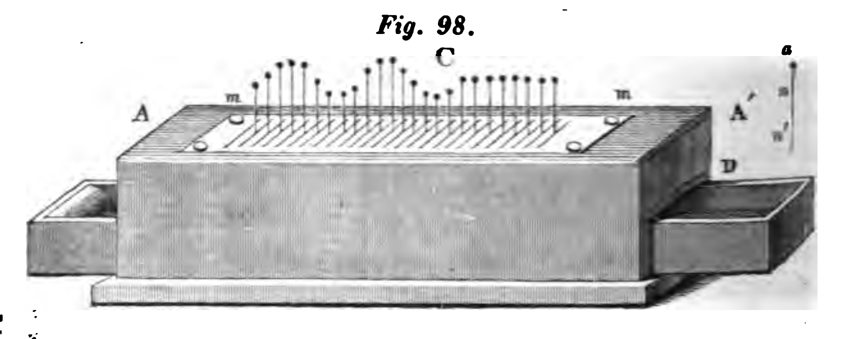
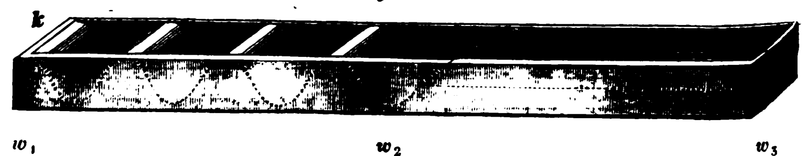


Fig. 99.



descendre par deux de ces ouvertures correspondantes, une aiguille d'acier nn' terminée à sa partie supérieure n par un bouton a, et bien arrondie à sa partie inférieure n'. Toutes ces aiguilles sont de même longueur et alors toutes les têtes a seront sur une même ligne droite tant que les extrémités n' reposeront sur la portion plane w_2w_3 de la feuille de laiton w_1w_3. Les

boutons a représentent maintenant des molécules d'éther, qui dans l'ordre indiqué formant une série de molécules en ligne droite, sont dans l'état de repos. Les aiguilles nn' et par conséquent aussi les têtes a ne peuvent prendre dans les ouvertures indiquées plus haut qu'un mouvement vertical de bas en haut ou de haut en bas et on leur communiquera un pareil mouvement si on fait glisser le tiroir, figure 99, dans la direction w_1w_3. En effet puisqu'aussitôt que la portion onduleuse w_1w_2 de la feuille de laiton vient se placer sous les aiguilles, c'est tantôt une proéminence, tantôt un creux qui correspond sous chacune d'elles, leur tête sera tantôt soulevée de l'amplitude de la ligne d'onde w_1w_2, tantôt descendra d'une quantité égale par l'effet du poids de l'aiguille. Et cette oscillation correspond évidemment avec celle que nous avons établie pour la lumière polarisée en ligne droite si l'on fait glisser le tiroir, figure 99, avec une vitesse uniforme. En outre, chaque bouton commencera son oscillation plus tard que celui qui l'avoisine dans la direction opposée au glissement du tiroir. Toujours les boutons seront sur une ligne identique à la directrice w_1w_2 située verticalement au-dessous; ceux qui sont verticalement au-dessus de w_2w_3 n'ont pas encore abandonné la position d'équilibre ; ceux qui sont sur la portion ondulatoire w_1w_2 se trouvent sur une ligne onduleuse qui court parallèlement à la portion de w_1w_2 située au-dessous. Cette ligne onduleuse se déplace comme la directrice w_1w_2 avec une vitesse constante. Le mouvement des boutons est ainsi absolument semblable à celui des molécules d'éther dans un rayon de lumière polarisé en ligne droite. La vitesse avec laquelle glisse le tiroir, figure 99, correspond à la vitesse de propagation du rayon. La longueur des intervalles et la hauteur de la ligne onduleuse w_1w_2, représentent la longueur d'onde et l'amplitude du rayon. Enfin le plan vertical des boutons passant par la fente tt, est le plan d'oscillation.

Pour figurer l'interférence de deux rayons polarisés rectilignement et à angle droit, d'égale longueur d'onde, et avoir une représentation de la lumière polarisée elliptiquement, à la place du tiroir (figure 97), on place dans l'étage supérieur la coulisse (figure 100). Elle a la longueur du tiroir (figure 99) et porte en haut et en bas deux fentes parallèles placées verticalement l'une au-dessous de l'autre et qui sont formées chacune de deux portions, l'une onduleuse égale à w_1w_2, l'autre rectiligne. L'axe de la portion $w'_1w'_2$ coïncide avec le milieu du côté p, de même que la fente rectiligne $w'_2w'_3$. Cette coulisse est fixée au moyen d'une patte E au tiroir (figure 99), de manière qu'on puisse tous deux les faire glisser ensemble ; mais la vis s_2 qui unit la patte à la coulisse figure 100, permet de faire glisser cette dernière par rapport au tiroir figure 99, d'une partie quelconque ou de la totalité

d'une longueur d'onde. Les fentes de la coulisse (figure 100) et celles des plaques C et D laissent maintenant libres deux séries d'ouvertures qui sont par paires verticalement l'une au-dessous de l'autre. On introduit de nouveau dans ces ouvertures les aiguilles nn'. Si les coulisses (figure 99 et figure 100), glissent ensemble, ces aiguilles restent toujours évidemment verticales; mais en outre elles peuvent avoir premièrement un mouvement ascendant et descendant, et secondement, dans les fentes des faces C et D, un mouvement en avant et en arrière.

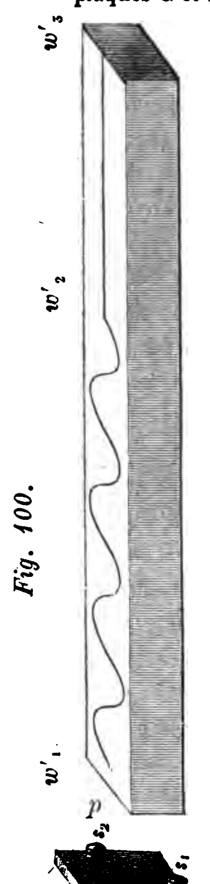
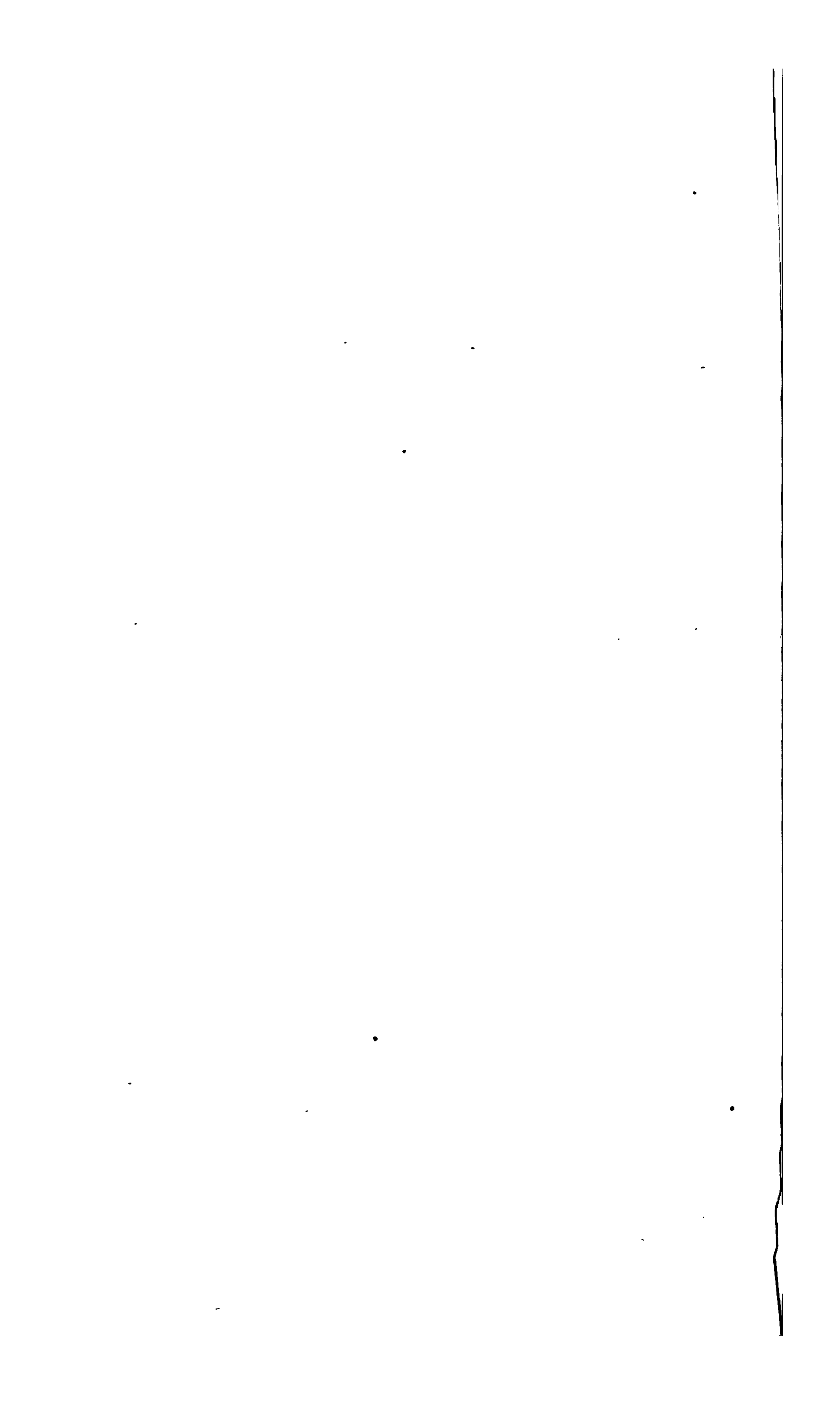


Fig. 100.

Tant qu'une aiguille traverse la partie rectiligne de la fente $w'_1w'_3$ et repose sur la partie plane w_2w_3, elle ne prend aucun mouvement, sa tête représente une molécule d'éther en repos. Mais pendant qu'on tire les coulisses, si une aiguille arrive dans la portion onduleuse de la fente $w'_1w'_2$, tandis qu'elle repose encore sur w_2w_3, ou bien si elle s'appuie sur la portion onduleuse w_1w_2, tandis qu'elle traverse encore la fente rectiligne $w'_2w'_3$, alors sa tête se meut ou d'avant en arrière dans un plan horizontal, ou de haut en bas et de bas en haut dans un plan vertical. Dans le premier cas, le mouvement est le même que celui d'une molécule d'éther sur un rayon polarisé en ligne droite, dont la ligne d'onde est $w'_1w'_2$, et dont le plan d'oscillation est horizontal. Dans le second cas, au contraire, la tête se meut comme une molécule d'éther sur un rayon polarisé en ligne droite dont la ligne d'onde est w_1w_2, dont le plan des vibrations est vertical. Si enfin l'aiguille se trouve dans la fente onduleuse $w'_1w'_2$ et qu'en même temps elle repose sur la portion onduleuse w_1w_2, le mouvement sera le même évidemment que celui que prend la molécule d'éther d'un rayon résultant de l'interférence de deux rayons polarisés en ligne droite perpendiculairement, de même longueur d'onde et de même amplitude. Le mouvement du bouton est en effet la résultante des mouvements dont w_1w_2 et $w'_1w'_2$ sont les lignes d'onde. Suivant la position relative des nœuds de ces lignes, les oscillations des têtes des aiguilles seront rectilignes, elliptiques ou circulaires, et ces têtes représenteront le mouvement des molécules d'éther dans un rayon de lumière polarisé rectilignement, ou elliptiquement, ou circulairement. Nous pouvons, au moyen de la vis s_2, changer à volonté la position des nœuds dans

les limites d'une longueur d'onde, et représenter par conséquent successivement chaque espèce de polarisation.

Enfin pour figurer encore l'interférence de deux rayons polarisés en ligne droite dont les plans de vibrations se confondent, on replace dans l'étage supérieur la coulisse (figure 97) et on place des aiguilles dont les longueurs sont différentes et prises de telle manière que, quand leurs extrémités inférieures reposent sur la partie plane $w_2 w_3$, leurs têtes sont sur une ligne onduleuse W. Celle-ci représente la ligne d'onde d'un des rayons interférents. Si nous glissons le tiroir (figure 99) de manière que les extrémités des aiguilles posent sur sa portion onduleuse, les têtes seront sur une nouvelle ligne qui représentera évidemment la ligne d'onde du rayon provenant de l'interférence de deux rayons dont l'un a pour ligne d'onde W et l'autre $w_1 w_2$: puisqu'aux écarts des boutons, tels qu'ils correspondaient à la ligne W s'ajoutent ceux de la ligne $w_1 w_2$. Si nous donnons aux lignes d'onde W et $w_1 w_2$ le même intervalle et la même amplitude, nous représentons à l'œil, en écartant les nœuds de $w_1 w_2$ par rapport à ceux de W, tous les cas possibles de l'interférence de deux rayons polarisés en ligne droite et égaux en qualité et en quantité (couleur et intensité). C'est là le cas d'interférence le plus intéressant et nous l'avons longuement examiné. (Page 78.)



SECONDE PARTIE.

ÉTUDE ANALYTIQUE ET BASES EXPÉRIMENTALES DES LOIS DE LA PROPAGATION DE LA LUMIÈRE DANS LES MILIEUX HOMOGÈNES EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE I.

Lois générales de la propagation de la lumière dans les milieux homogènes déduites par l'analyse.

Dans la recherche des lois physiques de la nature, nous étudions d'abord, aussi bien expérimentalement que théoriquement, les corps qui présentent dans tous leurs points des propriétés identiques. De ce cas qui montre les phénomènes dans leur plus grande simplicité, nous passons à celui des corps hétérogènes et avec une approximation le plus souvent suffisante, nous déduisons les lois qui les régissent des lois connues de leurs éléments homogènes. La considération des corps homogènes doit donc former la base et la partie la plus importante de toute étude physique ; aussi ne nous occuperons-nous ici que de ces corps. Parmi les milieux homogènes, nous devons considérer d'une manière toute particulière ceux qui ont des propriétés différentes suivant différentes directions, et qui, dès lors, peuvent être regardés comme représentant le cas le plus général : nous les avons désignés dans la première partie sous le nom de milieux *aniso-* ou *hétérotropes*. Nous ne les laisserons pas de côté dans cette seconde partie, où à l'aide des principes de mécanique et des hypothèses les plus simples et les plus naturelles, nous nous proposons d'établir les lois de la propagation de la lumière dans les milieux homogènes en général.

Etant obligés de supposer à l'éther une densité tellement faible que son poids est nul comparativement à celui de tous les autres corps qui tombent sous nos sens, nous devons aussi regarder l'état de l'éther qui remplit le vide existant entre les molécules d'un corps, comme dépendant de la position, de la grandeur de celles-ci, ainsi que des forces qui agissent entre elles. En effet, les molécules d'un corps, à cause de leurs masses très-considérables par rapport à celles des molécules d'éther, doivent agir d'une manière notable sur celles-ci, en admettant, ce qui est vraisemblable, qu'il existe entre celles-ci des forces moléculaires comme entre les particules matérielles elles-mêmes, et que l'éther, comme fluide très-subtil et très-élastique, permet à ses particules un déplacement très-facile. Déjà, sans recourir aux propriétés optiques, nous admettons que les molécules d'un corps sont distribuées d'une manière homogène quand il offre de l'homogénéité dans ses propriétés, et alors en nous attachant à ce que nous avons dit plus haut sur la distribution de l'éther, nous devons

conclure que celui-ci selon toute probabilité est aussi homogène au moins dans l'acception physique du mot, c'est-à-dire que le corps présente les mêmes propriétés optiques en deux points distants l'un de l'autre d'une quantité appréciable. Et en réalité cette conclusion se trouve constamment vérifiée par l'expérience.

Mais cette homogénéité de l'éther se distingue essentiellement de celle des corps. Par suite précisément de l'idée que nous nous faisons de la nature de ce fluide, ses molécules devront être disposées d'une manière plus ou moins dense, plus ou moins serrée, suivant qu'elles seront plus rapprochées d'une molécule du corps. Néanmoins la suite démontre que nous nous éloignons très-peu de la réalité en supposant *l'homogénéité de l'éther telle que ses molécules, rencontrées par une ligne droite menée dans une direction quelconque, sont toujours à des distances égales les unes des autres*, et en admettant que l'influence des molécules matérielles se borne à modifier suivant leur nature et leur disposition, les grandeurs de ces distances et les forces qui existent entre les molécules d'éther et même à les modifier différemment suivant les différentes directions des lignes droites. Et cette hypothèse est la plus naturelle dans le cas du vide absolu qui, dans les phénomènes optiques, ne diffère en rien d'un autre milieu quelconque isotrope.

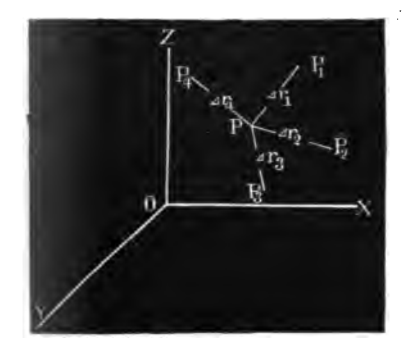
Dans les molécules d'éther résident leurs forces intimes, leurs *forces d'élasticité*. Tant que le repos de l'éther n'est troublé par aucun corps lumineux, ces forces maintiennent les molécules à leurs distances mutuelles primitives. Mais l'éther est-il mis en mouvement par le fait de la lumière qui prend naissance, aussitôt ces forces agissent, elles tendent à ramener à leur position d'équilibre les molécules qui en sont écartées et par là déterminent la propagation du mouvement lumineux commencé. — Comme pour toutes les forces moléculaires, nous admettrons aussi pour les forces intimes de l'éther, qu'elles agissent entre deux molécules et que la force avec laquelle une molécule quelconque agit sur une seconde a pour expression le produit des masses des molécules par une fonction de leur distance réciproque. Représentons cette fonction par $f(\ )$, les masses des deux molécules par m_1 et m_2, leur distance par Δr, alors $m_1\ m_2\ f(\Delta r)$ est la force avec laquelle une des molécules agit sur l'autre, c'est-à-dire que si cette force sollicitait d'une manière continue pendant l'unité de temps, l'unité de masse, pour l'abandonner ensuite tout d'un coup, elle lui communiquerait une vitesse $m_1\ m_2\ f(\Delta r)$.

Nous ne pouvons pas *à priori* déterminer complétement et facilement la forme de la fonction f; toutefois puisque nous regardons les forces d'élasticité comme des forces moléculaires, on peut admettre, au moins comme étant le

plus vraisemblable, que *la valeur de f change d'une manière continue pour des changements continus de Δr et que si Δr croît, la fonction diminue très-rapidement*, en sorte que la plus grande partie de la force qui sollicite une molécule provient de celles qui en sont les plus voisines. Cette restriction apportée à la fonction f suffira pour ce qui va suivre.

Soient P, P_1, P_2 etc., figure 101, les molécules d'une portion illimitée d'éther supposé homogène et en repos. Menons par un point quelconque O trois axes coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ. Par rapport à ce système soient x, y, z, les coordonnées de la molécule P, $x + \Delta x_1$, $y + \Delta y_1$, $z + \Delta z_1$, celles de la molécule P_1, etc. Représentons en outre la masse d'une molécule par m et les distances entre P et P_1, P_2... par Δr_1, Δr_2... La force avec laquelle la molécule P_1 agit sur la molécule P est exprimée par le produit $m^2 f(\Delta r_1)$. La direction de cette force se confond avec la ligne PP_1, et les cosinus des angles qu'elle fait avec les trois axes coordonnés sont $\frac{\Delta x_1}{\Delta r_1}$, $\frac{\Delta y_1}{\Delta r_1}$, $\frac{\Delta z_1}{\Delta r_1}$. Les composantes X, Y, Z de cette force suivant les trois axes seront :

Fig. 101.



$$X = m^2 f(\Delta r_1) \frac{\Delta x_1}{\Delta r_1}, \qquad Y = m^2 f(\Delta r_1) \frac{\Delta y_1}{\Delta r_1}, \qquad Z = m^2 f(\Delta r_1) \frac{\Delta z_1}{\Delta r_1}.$$

De ces expressions on déduira celles qui correspondent aux molécules P_2, P_3... en substituant simplement à l'indice 1, les indices 2, 3, etc. Supposons ces expressions toutes écrites et additionnons toutes les composantes qui sont dans la même direction, nous aurons les trois composantes X, Y, Z de l'action totale de toute la masse d'éther sur la molécule P suivant les directions des trois axes coordonnés. On trouve ainsi :

$$X = m^2 \left(f(\Delta r_1) \frac{\Delta x_1}{\Delta r_1} + f(\Delta r_2) \frac{\Delta x_2}{\Delta r_2} + \ldots \right)$$

$$Y = m^2 \left(f(\Delta r_1) \frac{\Delta y_1}{\Delta r_1} + f(\Delta r_2) \frac{\Delta y_2}{\Delta r_2} + \ldots \right)$$

$$Z = m^2 \left(f(\Delta r_1) \frac{\Delta z_1}{\Delta r_1} + f(\Delta r_2) \frac{\Delta z_2}{\Delta r_2} + \ldots \right)$$

et si pour abréger nous employons l'algorithme Σ pour représenter la somme d'un nombre infini de termes, nous aurons en définitive :

$$X = m^2 \Sigma f(\Delta r) \frac{\Delta x}{\Delta r}, \qquad Y = m^2 \Sigma f(\Delta r) \frac{\Delta y}{\Delta r}, \qquad Z = m^2 \Sigma f(\Delta r) \frac{\Delta z}{\Delta r}.$$

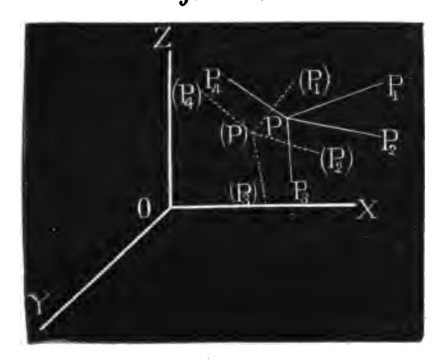
Dans l'état d'équilibre que nous avons supposé ici, la résultante de toutes les forces auxquelles est soumise une molécule est nécessairement nulle et alors :

$$\text{I. } \Sigma f(\Delta r) \frac{\Delta x}{\Delta r} = 0, \qquad \Sigma f(\Delta r) \frac{\Delta y}{\Delta r} = 0, \qquad \Sigma f(\Delta r) \frac{\Delta z}{\Delta r} = 0.$$

Ces équations pour le cas du repos nous serviront pour simplifier les équations que nous établirons pour le mouvement. Nous obtiendrons facilement ces dernières par le moyen qu'indique la mécanique. Nous chercherons à déterminer, d'après la nature des forces d'élasticité, la force accélératrice qui sollicite à un moment quelconque du mouvement une molécule d'éther et nous identifierons ensuite cette force avec celle que la mécanique nous apprend à trouver, d'après la forme de la trajectoire à ce moment là.

Pendant le mouvement vibratoire de l'éther une molécule est écartée de sa position de repos ; elle a subi dès lors suivant les trois axes coordonnés trois déplacements de différentes valeurs, qu'on mesurera par les projections du déplacement réel (c'est-à-dire, de la ligne qui joint la position actuelle à la position de repos) sur chacun des trois axes. Nous estimerons ces déplacements en fonctions du temps et de la position de la molécule, c'est-à-dire, de ses coordonnées : car lorsqu'on l'aura fait, on trouvera facilement le lieu de chaque molécule à chaque instant et on pourra suivre le mouvement. Représentons les déplacements de la molécule P (figure 102), à l'instant t et suivant les axes des x, des y et des z respectivement par ξ, η, et ζ qui sont dès lors des fonctions de t, x, y et z. Au bout du temps t, les coordonnées seront :

Fig. 102.



pour P $\quad x + \xi(x\,y\,z), \qquad y + \eta(x\,y\,z), \qquad z + \zeta(x\,y\,z)$

$$\text{pour } P_1 \left\{ \begin{array}{l} x + \Delta x_1 + \xi(x + \Delta x_1, y + \Delta y_1, z + \Delta z_1) \\ y + \Delta y_1 + \eta(x + \Delta x_1, y + \Delta y_1, z + \Delta z_1) \\ z + \Delta z_1 + \zeta(x + \Delta x_1, y + \Delta y_1, z + \Delta z_1) \end{array} \right.$$

etc., etc.

Nous ne considérerons ici que les mouvements vibratoires pour lesquels *les écarts ou les déplacements par rapport à la distance de deux molécules voisines sont très-petits.* Nous n'attribuerons la lumière qu'à de pareilles vibrations. Les variations $\Delta\xi_n$, $\Delta\eta_n$, $\Delta\zeta_n$ qu'éprouvent les écarts ξ, η, ζ quand à la place de x, y, z on met $x + \Delta x_n$, $y + \Delta y_n$, $z + \Delta z_n$, c'est-à-dire, quand on passe de la molécule P à la molécule P_n seront très-petites par rapport à la distance Δr_n et à ses projections Δx_n, Δy_n, Δz_n, puisque P^n n'exerce une action sensible sur P qu'autant qu'il en est très-voisin. Nous pourrons donc dans les développements ultérieurs, négliger devant Δx_n, Δy_n, Δz_n toutes les puissances de ces variations supérieures à la première. La distance primitive Δr_n de la molécule P à la molécule P_n est de même ordre que Δx_n, Δy_n, Δz_n. A l'instant t pendant le mouvement, la distance de ces dernières est autre que dans l'état d'équilibre : au lieu de Δr_n on aura par exemple $\Delta r_n + \Delta\rho_n$ et la variation $\Delta\rho_n$ est évidemment du même ordre de grandeur que les variations $\Delta\xi_n$, $\Delta\eta_n$ et $\Delta\zeta_n$, qui en sont les projections. Il est donc établi d'après cela qu'on négligera toutes les puissances de $\Delta\rho_n$ devant Δr_n, aussi bien que devant Δx_n, Δy_n, Δz_n qui sont de même ordre que Δr_n. Servons-nous maintenant des nouveaux signes $\Delta\xi_n$, $\Delta\eta_n$, $\Delta\zeta_n$, alors à l'instant t auquel nous voulons considérer le mouvement, les coordonnées sont :

pour P $\quad x + \xi, \qquad y + \eta, \qquad z + \zeta.$

$$\text{pour } P_1 \quad \begin{cases} x + \Delta x_1 + \xi + \Delta\xi_1 = x + \xi + \Delta x_1 + \Delta\xi_1 \\ y + \Delta y_1 + \eta + \Delta\eta_1 = y + \eta + \Delta y_1 + \Delta\eta_1 \\ z + \Delta z_1 + \zeta + \Delta\zeta_1 = z + \zeta + \Delta z_1 + \Delta\zeta_1. \end{cases}$$

etc., etc.

Comparons ces coordonnées avec les coordonnées primitives, on voit de suite que l'état actuel de l'éther ne diffère de celui qui correspond à l'état de repos que parce que, à la place des grandeurs Δr_n, Δx_n, Δy_n, Δz_n, il y a les valeurs $\Delta r_n + \Delta\rho_n$, $\Delta x_n + \Delta\xi_n$, $\Delta y_n + \Delta\eta_n$, $\Delta z_n + \Delta\zeta_n$. Il en résulte nécessairement qu'il n'y a qu'à remplacer les premières par les dernières dans les équations de la page 159 pour obtenir les composantes de la force qui sollicite à l'instant t la molécule P, c'est-à-dire, les composantes de la force accélératrice à l'instant t. On trouve ainsi :

$$X = m^2 \Sigma f(\Delta r + \Delta\rho) \frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r + \Delta\rho}, \qquad Y = m^2 \Sigma f(\Delta r + \Delta\rho) \frac{\Delta y + \Delta\eta}{\Delta r + \Delta\rho},$$

$$Z = m^2 \Sigma f(\Delta r + \Delta\rho) \frac{\Delta z + \Delta\zeta}{\Delta r + \Delta\rho}.$$

Mais d'un autre côté la mécanique analytique nous apprend que les com-

posantes de cette même force accélératrice sont représentées par le produit de la masse de la molécule et de la différentielle seconde de ses coordonnées par rapport au temps. Ces produits sont : $m\,\frac{d^2(x+\xi)}{dt^2}$, $m\,\frac{d^2(y+\eta)}{dt^2}$, $m\,\frac{d^2(z+\zeta)}{dt^2}$ ou bien, puisque x, y et z coordonnées de la molécule dans sa position primitive de repos sont indépendantes du temps t, $m\,\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $m\,\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $m\,\frac{d^2\zeta}{dt^2}$. Si maintenant nous identifions les expressions de ces composantes avec celles que nous avons obtenues par la considération des forces effectives, nous aurons les trois équations suivantes du mouvement :

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = m\,\Sigma f(\Delta r + \Delta\rho)\,\dfrac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r + \Delta\rho}, \\[2mm] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = m\,\Sigma f(\Delta r + \Delta\rho)\,\dfrac{\Delta y + \Delta\eta}{\Delta r + \Delta\rho}, \\[2mm] \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = m\,\Sigma f(\Delta r + \Delta\rho)\,\dfrac{\Delta z + \Delta\zeta}{\Delta r + \Delta\rho}. \end{cases}$$

Elles expriment les lois de tous les différents mouvements de l'éther en vertu desquelles chaque molécule décrit sa trajectoire autour de sa position d'équilibre seulement dans des limites très-restreintes. Chacun de ces mouvements peut se représenter par des équations de cette forme :

$$\xi = \varphi(x\,y\,z\,t) \qquad \eta = \psi(x\,y\,z\,t) \qquad \zeta = \chi(x\,y\,z\,t)$$

ce mouvement devant s'appliquer à tous les mouvements possibles d'un éther présentant la propriété dont nous avons parlé plus haut ; les fonctions φ, χ, ψ substituées à la place de ξ, η, ζ dans les équations II doivent les satisfaire, quand on donnera aux grandeurs x, y, z et t les valeurs correspondantes à une certaine molécule et à un certain moment du mouvement ; car on n'a pris pour point de départ ni un moment déterminé, ni une molécule particulière.

L'intégration complète des équations différentielles II, donnerait tous les mouvements possibles analogues à celui énoncé plus haut. Cette résolution générale a été faite au moyen du théorème de Fourier, par M. Cauchy, dans son mémoire sur la dispersion de la lumière, 1836. Elle serait pour nous de peu d'importance ; il nous sera bien plus utile d'établir que le mouvement dans des ondes planes à vibrations rectilignes, fait partie des mouvements possibles de l'éther homogène, et par suite de déduire les lois ultérieures d'un pareil mouvement. Nous supposerons à cet effet toute la masse illimitée d'un éther homogène traversée par des ondes planes à vibrations rectilignes et

parallèles entre elles. Par l'origine des coordonnées menons un plan parallèle aux ondes, son équation sera :

(E) $x \text{ Cos. } \alpha + y \text{ Cos. } \beta + z \text{ Cos. } \gamma = u\,x + v\,y + w\,z = o,$

α, β, γ étant les angles que sa normale fait avec les trois axes coordonnés.

Tout plan parallèle à E passe par la position de repos des molécules d'éther qui à chaque instant sont dans le même état vibratoire, c'est-à-dire, qui sont également éloignées dans la même direction de leur position de repos et se déplacent avec une vitesse égale et de même sens. Nous représenterons par l les déplacements d'un pareil groupe de molécules. Admettons que les vibrations rectilignes obéissent aux mêmes lois que celles d'un rayon polarisé en ligne droite, alors pour toutes les molécules d'un plan parallèle à E on a :

$$l = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} v\,t.$$

Nous supposons ici qu'on compte l'origine du temps au moment où toutes les molécules traversent leur plan, pour ensuite se déplacer suivant les l positifs ; et, comme dans la première partie, v représente la vitesse de propagation, λ la longueur d'onde et a l'amplitude, laquelle doit être regardée comme très-petite par rapport à la distance de deux molécules consécutives.

Menons une ligne droite perpendiculaire au plan E, toutes les molécules qu'elle rencontre représentent un rayon lumineux qui ne se distingue évidemment d'un rayon polarisé en ligne droite, tel que nous l'avons considéré dans la première partie, qu'en ce que sur lui les écarts peuvent ne pas être perpendiculaires à la direction de propagation ; car nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur la direction de nos vibrations rectilignes. Pour l'équation du rayon de lumière on pourra prendre aussi (Voy. 1re partie, p. 72)

$$l = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \text{D})$$

D représentant la distance d'une molécule au point de rencontre du rayon et du plan E. Cette distance reste constante pour tous les points d'un plan parallèle à E et la dernière équation s'applique à tous ces points. Soient maintenant x, y, z les coordonnées d'un point, sa distance au plan E sera représentée par l'expression

$$x \text{ Cos. } \alpha + y \text{ Cos. } \beta + z \text{ Cos. } \gamma = \text{E}$$

par suite nous obtenons pour le mouvement en question de tout l'éther l'équation suivante :

$$1) \qquad l = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - \text{E})$$

Soient A, B, C les cosinus respectifs des angles que fait la direction des

vibrations avec les axes des x, des y et des z. En représentant de nouveau par ξ, η et ζ les déplacements d'une molécule d'éther suivant les axes, ou ce qui est la même chose les projections sur ces axes de son déplacement, on a

$$2) \qquad \xi = A\,l, \qquad \eta = B\,l, \qquad \zeta = C\,l.$$

Ces valeurs de ξ, η et ζ, doivent maintenant satisfaire les équations différentielles II, si le mouvement dans les ondes planes exprimé dans l'équation 1) ou dans les trois équations 2) est compatible avec la constitution de l'éther homogène qu'on a supposée. Avant d'entreprendre cette substitution il sera bon de donner aux équations différentielles une forme plus commode.

A cause de la petitesse de la variation $\Delta\rho$ on peut poser avec une approximation suffisante :

$$f(\Delta r + \Delta\rho) = f(\Delta r) + \frac{df(\Delta r)}{d(\Delta r)}\Delta\rho = f(\Delta r) + f^1(\Delta r)\,\Delta\rho.$$

Pour la même raison on a

$$\frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r + \Delta\rho} = \frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r}\left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta\rho}{\Delta r}}\right) = \frac{(\Delta x + \Delta\xi)\left(1 - \frac{\Delta\rho}{\Delta r}\right)}{\Delta r}.$$

Si nous effectuons la multiplication indiquée ici et si nous négligeons le terme $\frac{\Delta\xi\,\Delta\rho}{\Delta r^2}$, puisqu'il est de même ordre que la seconde puissance de $\Delta\xi$ ou $\Delta\rho$, nous obtenons pour le quotient précédent,

$$\frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r} - \frac{\Delta x\,\Delta\rho}{\Delta r^2}$$

par conséquent :

$$f(\Delta r + \Delta\rho)\frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r + \Delta\rho} = [f(\Delta r) + f^1(\Delta r)\,\Delta\rho]\left[\frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r} - \frac{\Delta x\,\Delta\rho}{\Delta r^2}\right].$$

d'où l'on déduit de nouveau, en effectuant la multiplication et en négligeant les termes de la deuxième puissance en $\Delta\xi$ et $\Delta\rho$;

$$f(\Delta r)\frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r} + [\Delta r\, f^1(\Delta r) - f(\Delta r)]\frac{\Delta x\,\Delta\rho}{\Delta r^2}$$

ou bien si nous posons pour abréger

$$\Delta r\, f^1(\Delta r) - f(\Delta r) = \varphi(\Delta r)$$

et si pour $f(\Delta r)$ et $\varphi(\Delta r)$ nous écrivons tout simplement f et φ

$$f(\Delta r + \Delta\rho)\frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r + \Delta\rho} = f\,\frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r} + \varphi\,\frac{\Delta x\,\Delta\rho}{\Delta r^2}.$$

Dès lors à la place des équations II nous pouvons écrire les suivantes :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m\Sigma\left(f\,\frac{\Delta x + \Delta\xi}{\Delta r} + \varphi\,\frac{\Delta x\,\Delta\rho}{\Delta r^2}\right),$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = m\Sigma\left(f\,\frac{\Delta y + \Delta\eta}{\Delta r} + \varphi\,\frac{\Delta y\;\Delta\rho}{\Delta r^2}\right)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = m\Sigma\left(f\,\frac{\Delta\zeta + \Delta\zeta}{\Delta r} + \varphi\,\frac{\Delta z\;\Delta\rho}{\Delta r^2}\right).$$

A cause des équations I de la page 160, qui sont aussi, comme nous l'avons remarqué, applicables pendant le mouvement puisqu'elles expriment l'état initial de l'éther, les équations différentielles précédentes se transforment en les suivantes :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m\Sigma\left(f\,\frac{\Delta\xi}{\Delta r} + \varphi\,\frac{\Delta x\;\Delta\rho}{\Delta r^2}\right),\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = m\Sigma\left(f\,\frac{\Delta\eta}{\Delta r} + \varphi\,\frac{\Delta y\;\Delta\rho}{\Delta r^2}\right)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = m\,\Sigma\left(f\,\frac{\Delta\zeta}{\Delta r} + \varphi\,\frac{\Delta z\;\Delta\rho}{\Delta r^2}\right).$$

Enfin pour exprimer $\Delta\rho$ en fonction de $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ et $\Delta\zeta$, remarquons que $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ de même que

$$(\Delta r + \Delta\rho)^2 = (\Delta x + \Delta\xi)^2 + (\Delta y + \Delta\eta)^2 + (\Delta z + \Delta\zeta)^2$$

équations qui donnent à cause de la petitesse de $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ et $\Delta\rho$

$$\Delta\rho = \frac{\Delta x}{\Delta r}\,\Delta\xi + \frac{\Delta y}{\Delta r}\,\Delta\eta + \frac{\Delta z}{\Delta r}\,\Delta\zeta$$

Substituant cette valeur de $\Delta\rho$ dans les équations différentielles, on les change en les suivantes :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m\,\Sigma\,f\,\frac{\Delta\xi}{\Delta r} + m\,\Sigma\,\frac{\varphi}{\Delta r}\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta r^2}\,\Delta\xi + \frac{\Delta x\;\Delta y}{\Delta r^2}\,\Delta\eta + \frac{\Delta x\;\Delta z}{\Delta r^2}\,\Delta\zeta\right)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = m\,\Sigma\,f\,\frac{\Delta\eta}{\Delta r} + m\,\Sigma\,\frac{\varphi}{\Delta r}\left(\frac{\Delta y^2}{\Delta r^2}\,\Delta\eta + \frac{\Delta x\;\Delta y}{\Delta r^2}\,\Delta\xi + \frac{\Delta z\;\Delta y}{\Delta r^2}\,\Delta\zeta\right)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = m\,\Sigma\,f\,\frac{\Delta\zeta}{\Delta r} + m\,\Sigma\,\frac{\varphi}{\Delta r}\left(\frac{\Delta z^2}{\Delta r^2}\,\Delta\zeta + \frac{\Delta z\;\Delta x}{\Delta r^2}\,\Delta\xi + \frac{\Delta z\;\Delta y}{\Delta r^2}\,\Delta\eta\right).$$

Dans ces équations plus commodes nous allons maintenant substituer Al, Bl, Cl à la place de ξ, η et ζ. A cet effet calculons d'abord les valeurs de $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ et $\Delta\zeta$. Nous avons :

$$\xi = \mathrm{A}\,l = \mathrm{A}\,a\ \mathrm{Sin.}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(vt - \mathrm{E})$$

$$= \mathrm{A}\,a\ \mathrm{Sin.}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,vt.\ \mathrm{Cos.}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,\mathrm{E} - \mathrm{A}\,a\ \mathrm{Cos.}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,vt.\ \mathrm{Sin.}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,\mathrm{E}.$$

Pour abréger posons :

$$\mathrm{A}\,a\ \mathrm{Sin.}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,vt = \mathfrak{a},\quad \mathrm{A}\,a\ \mathrm{Cos.}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,vt = \mathfrak{a}' \text{ on obtient :}$$

$$\xi = a \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda} E - a' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} E.$$

Augmentons maintenant dans cette équation les quantités x, y, z respectivement de Δx, Δy, Δz, ξ augmentera de $\Delta\xi$ et E se changera en $E + \Delta E$, ΔE représentant l'expression $\Delta x \text{ Cos. } \alpha + \Delta y \text{ Cos. } \beta + \Delta z \text{ Cos. } \gamma$. On aura l'équation suivante :

$$\xi + \Delta\xi = a \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda}(E + \Delta E) - a' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(E + \Delta E)$$

On en déduit en isolant $\Delta\xi$ et en mettant à la place de ξ sa valeur :

$$\Delta\xi = a\left(\text{Cos. } \frac{2\pi}{\lambda}(E + \Delta E) - \text{Cos. } \frac{2\pi}{\lambda} E\right)$$

$$- a'\left(\text{Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(E + \Delta E) - \text{Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} E\right)$$

$$= \text{Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}\Delta E\left(- a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} E - a' \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda} E\right)$$

$$- \left(1 - \text{Cos. } \frac{2\pi}{\lambda}\Delta E\right)\left(a \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda} E - a' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} E\right).$$

Mais maintenant :

$$1 - \text{Cos. } \frac{2\pi}{\lambda}\Delta E = 2 \text{ Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda}\Delta E,$$

$$a \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda} E - a' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} E = \xi$$

et $$- a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} E - a' \text{ Cos. } \frac{2\pi}{\lambda} E = \frac{d\xi}{dE} \cdot \frac{\lambda}{2\pi},$$ par suite

$$\Delta\xi = - 2\xi \text{ Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda}\Delta E + \frac{d\xi}{dE}\frac{\lambda}{2\pi} \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}\Delta E.$$

et à cause de la symétrie :

$$\Delta\eta = - 2\eta \text{ Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda}\Delta E + \frac{d\eta}{dE}\frac{\lambda}{2\pi} \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}\Delta E.$$

$$\Delta\zeta = - 2\zeta \text{ Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda}\Delta E + \frac{d\zeta}{dE}\frac{\lambda}{2\pi} \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}\Delta E.$$

En introduisant ces valeurs dans nos équations différentielles elles deviennent :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma\, m\, \frac{f}{\Delta r}\left(-2\,\xi\, \text{Sin.}^2\frac{\pi}{\lambda}\,\Delta E + \frac{d\xi}{dE}\,\frac{\lambda}{2\pi}\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)$$

$$+ \Sigma\, m\, \frac{\varphi}{\Delta r}\left(-2\,\xi\, \text{Sin.}^2\frac{\pi}{\lambda}\,\Delta E + \frac{d\xi}{dE}\,\frac{\lambda}{2\pi}\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)\frac{\Delta x^2}{\Delta r^2}$$

$$+ \Sigma\, m\, \frac{\varphi}{\Delta r}\left(-2\,\eta\, \text{Sin.}^2\frac{\pi}{\lambda}\,\Delta E + \frac{d\eta}{dE}\,\frac{\lambda}{2\pi}\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)\frac{\Delta x\,\Delta y}{\Delta r^2}$$

$$+ \Sigma\, m\, \frac{\varphi}{\Delta r}\left(-2\,\zeta\, \text{Sin.}^2\frac{\pi}{\lambda}\,\Delta E + \frac{d\zeta}{dE}\,\frac{\lambda}{2\pi}\,\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)\frac{\Delta z\,\Delta x}{\Delta r^2},$$

etc.

Et si nous ordonnons d'après les déplacements et leurs coefficients différentiels, il vient :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi\left[\Sigma\, m\left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\Delta x^2\varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-2\,\text{Sin.}^2\frac{\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)\right]$$

$$+ \eta\left[\Sigma\, m\left(\frac{\Delta x\,\Delta y\,\varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-2\,\text{Sin.}^2\frac{\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)\right]$$

$$+ \zeta\left[\Sigma\, m\left(\frac{\Delta x\,\Delta z\,\varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-2\,\text{Sin.}^2\frac{\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)\right]$$

$$+ \frac{d\xi}{dE}\,\frac{\lambda}{2\pi}\left[\Sigma\, m\left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\Delta x^2\varphi}{\Delta r^3}\right)\left(\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)\right]$$

$$+ \frac{d\eta}{dE}\,\frac{\lambda}{2\pi}\left[\Sigma\, m\left(\frac{\Delta x\,\Delta y\,\varphi}{\Delta r^3}\right)\left(\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)\right]$$

$$+ \frac{d\zeta}{dE}\,\frac{\lambda}{2\pi}\left[\Sigma\, m\left(\frac{\Delta x\,\Delta z\,\varphi}{\Delta r^3}\right)\left(\text{Sin.}\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta E\right)\right], \text{ etc.}$$

Mais maintenant on peut facilement se convaincre que d'après la constitution de l'éther qu'on a adoptée, les coefficients des quotients différentiels de ξ, η et ζ disparaissent. En effet ces coefficients sont les sommes d'un nombre infini de termes dont chacun se rapporte à un point déterminé de la masse illimitée de l'éther. Nous pouvons considérer ces points par couples, de telle manière que les deux points d'un couple soient en ligne droite avec l'origine des coordonnées, l'un d'un côté du plan E, l'autre de l'autre et à la même distance. Pour ces deux points, m et $\frac{f}{\Delta r} + \frac{\Delta x^2\varphi}{\Delta r^3}$ ont la même valeur : mais si pour l'un des points la valeur de E est positive, elle sera négative pour l'autre, puisqu'il est du côté opposé par rapport au plan E. De même pour

les deux points d'un couple, les valeurs correspondantes de ΔE et de $\text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} \Delta E$ sont affectées de signes contraires; la même chose pour les termes $m \left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\Delta x^2 \varphi}{\Delta r^3}\right) \left(\text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda} \Delta E\right)$: ils se détruisent mutuellement. Puisqu'en outre pour les points appartenant au plan E, l'expression E et en même temps aussi la somme des termes correspondants sont nulles, il est évident que toute la somme formant le coefficient de $\frac{d\xi}{dE}$ doit disparaître comme aussi les coefficients des autres dérivées qui tous deux sont composés d'une manière analogue. On déduit d'après cela pour $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ et aussi pour $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ et $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ d'après la symétrie, les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi &\left[\Sigma\, m \left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\Delta x^2 \varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-\, 2\ \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta E\right)\right] \\
+ \eta &\left[\Sigma\, m \left(\frac{\Delta x\, \Delta y\, \varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-\, 2\ \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta E\right)\right] \\
+ \zeta &\left[\Sigma\, m \left(\frac{\Delta x\, \Delta z\, \varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-\, 2\ \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta E\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\eta}{dt^2} = \eta &\left[\Sigma\, m \left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\Delta y^2 \varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-\, 2\ \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta E\right)\right] \\
+ \xi &\left[\Sigma\, m \left(\frac{\Delta y\, \Delta x\, \varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-\, 2\ \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta E\right)\right] \\
+ \zeta &\left[\Sigma\, m \left(\frac{\Delta y\, \Delta z\, \varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-\, 2\ \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta E\right)\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \zeta &\left[\Sigma\, m \left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\Delta z^2 \varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-\, 2\ \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta E\right)\right] \\
+ \eta &\left[\Sigma\, m \left(\frac{\Delta z\, \Delta y\, \varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-\, 2\ \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta E\right)\right] \\
+ \xi &\left[\Sigma\, m \left(\frac{\Delta z\, \Delta x\, \varphi}{\Delta r^3}\right)\left(-\, 2\ \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta E\right)\right].
\end{aligned}$$

Dans ces équations les six coefficients différents des projections des déplacements ne dépendent, comme il est facile de le voir, que de la position du plan

des ondes E et de la nature spécifique de l'éther que l'on considère. Pour abréger nous remplacerons ces coefficients par les lettres L, M, N, P, Q et R et nous aurons :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -(L\xi + R\eta + Q\zeta),$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -(R\xi + M\eta + P\zeta),$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -(Q\xi + P\eta + N\zeta).$$

Il nous reste encore à mettre à la place de $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ etc., les valeurs que l'on peut déduire pour ces dérivées des équations 2), page 164. Elles donnent en effet

$$\frac{d\xi}{dt} = A\,\frac{dl}{dt} = A\,a\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,v\,\text{Cos.}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\left(vt - E\right),$$

et par conséquent :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,v\right)^2 \text{Sin.}\,\frac{2\,\pi}{\lambda}\,(vt - E) = -A\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,v\right)^2 l,$$

De même :

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -B\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,v\right)^2 l \text{ et } \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -C\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,v\right)^2 l.$$

Substituons ces expressions dans les dernières équations obtenues, mettons en outre pour ξ, η, ζ leurs expressions équivalentes Al, Bl et Cl, nous obtiendrons alors, après avoir divisé chaque équation par l :

$$A\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,v\right)^2 = LA + RB + QC,$$

$$B\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,v\right)^2 = RA + MB + PC,$$

$$C\left(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,v\right)^2 = QA + PB + NC.$$

Ces équations que nous obtenons après avoir substitué, dans les équations générales du mouvement, les valeurs que nous avons supposées pour les écarts, ne contiennent même pas les grandeurs de ces déplacements, mais ne renferment, outre les coëfficients L... R, que la durée $\frac{\lambda}{v}$ des vibrations rectilignes et les cosinus A, B, C, qui déterminent les directions de ces vibra-

tions. Ces équations sont donc les équations de condition qui doivent être satisfaites entre les différentes grandeurs énumérées, si le mouvement vibratoire dans les ondes planes exprimé par l'équation 1) ou les équations 2) fait partie des mouvements possibles de l'éther. Et si elles ne sont pas contradictoires, et par conséquent si le mouvement est possible, elles sont précisément celles d'où l'on déduira les relations mutuelles de toutes les valeurs dont nous parlons. Nous allons indiquer en quelques mots comment on résoudrait cette question d'une manière générale.

L'élimination de la quantité $\left(\frac{2\pi}{\lambda}v\right)^2$ dans les trois équations de conditions pour la possibilité du mouvement dans les ondes planes, conduit aux deux équations :

$$\frac{LA + RB + QC}{A} = \frac{RA + MB + PC}{B} = \frac{QA + PB + NC}{C}$$

et celles-ci jointes à la relation connue $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, déterminent les trois cosinus A, B, C, par conséquent la direction des vibrations, aussitôt que les quantités L..... R sont connues, et elles donnent, comme on le voit de suite, pour chacune des quantités A, B, C, trois valeurs appartenant à trois directions perpendiculaires. Pour nous convaincre plus vite et obtenir en outre plus facilement une expression de la loi, considérons l'ellipsoïde dont l'équation serait :

$$\text{F)} \qquad Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2\,Pyz + 2\,Qxz + 2\,Rxy = 1.$$

Représentons les cosinus des angles qu'un de ses axes fait avec les axes coordonnés respectivement par A', B', C'; on sait que la géométrie analytique donne pour déterminer ces cosinus et par conséquent la direction de cet axe, les deux équations suivantes :

$$\frac{LA' + RB' + QC'}{A'} = \frac{RA' + MB' + PC'}{B'} = \frac{QA' + PB' + NC'}{C'},$$

auxquelles s'ajoute encore la relation connue $A'^2 + B'^2 + C'^2 = 1$. Ces équations ne diffèrent en rien de celles que nous avons obtenues plus haut pour la détermination de la direction des vibrations de notre mouvement; nous en concluons donc que la direction des vibrations rectilignes, dans le cas où elles conviennent aux mouvements possibles de l'éther homogène, doivent être parallèles à un des axes de l'ellipsoïde en question. M. Cauchy a appelé cet ellipsoïde *ellipsoïde de polarisation*, parce qu'il détermine la polarité des vibrations rectilignes. Les coëfficients dans son équation sont fonction de la nature de l'éther, de la position du plan d'ondes E, et de la longueur d'onde λ. Dans un seul et même milieu, la forme et la position de cette sur-

face changent si la position du plan d'onde aussi bien que la longueur d'onde viennent à changer. La même chose arrive si, sans modifier ces deux dernières, on passe d'un milieu dans un autre.

L'ellipsoïde de polarisation ne donne pas seulement les directions des vibrations correspondantes à un certain plan et à une certaine longueur d'onde, il détermine en outre la vitesse de propagation de chacun des trois groupes de vibrations. Soit s, la valeur réciproque de l'un des trois demi-axes de l'ellipsoïde de polarisation, on a :

$$s^2 = \frac{LA' + RB' + QC'}{A'} = \frac{RA' + MB' + PC'}{B'} = \frac{QA' + PB' + NC'}{C'}.$$

Si nous mettons ici successivement pour A', B', C', les trois groupes ternaires de valeurs, comme elles correspondent à chaque axe, nous aurons les carrés des trois réciproques des demi-axes. Mais d'un autre côté nous avons :

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}v\right)^2 = \frac{LA + RB + QC}{A} = \frac{RA + MB + PC}{B} = \frac{QA + PB + NC}{C}$$

et maintenant comme pour les trois groupes possibles de vibrations on a : $A = A'$, $B = B'$, et $C = C'$, il en résulte :

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}v\right)^2 = s^2,$$

d'où

$$v = s \cdot \frac{\lambda}{2\pi}.$$

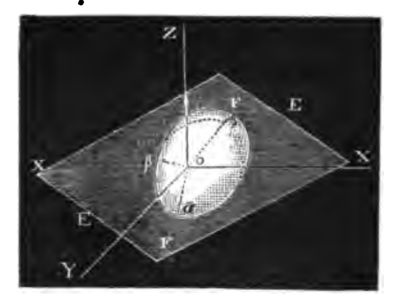
Ainsi en multipliant la valeur réciproque de l'un des trois demi-axes par la quantité $\frac{\lambda}{2\pi}$, le produit est la vitesse de propagation des vibrations qui sont parallèles à la direction de cet axe. Et ainsi se trouve résolue la dernière question que l'on puisse poser à la théorie d'une manière générale.

Il ne sera pas inutile de résumer de nouveau les résultats obtenus jusqu'à présent. On peut le faire de la manière suivante.

L'éther homogène permet un mouvement qui consiste dans la propagation d'ondes planes à vibrations rectilignes, parallèles et ayant de très-petites amplitudes. Mais la direction de ces vibrations, dans un éther donné, pour un plan d'onde et une longueur d'onde également donnés, n'est nullement arbitraire : ces vibrations ne peuvent avoir lieu que suivant trois directions déterminées, perpendiculaires entre elles (fig. 103). *Ces directions sont parallèles aux axes de l'ellipsoïde de polarisation* F, *de telle manière qu'à un plan d'onde déterminé et à une certaine longueur d'onde correspondent trois groupes de vibrations, chacun se propage avec une vitesse propre et celle-ci se déduit aussi de l'ellipsoïde de polarisation. Pour obtenir la vitesse*

de propagation des vibrations dont les directions sont parallèles à un des trois demi-axes $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, de cette surface, on multiplie la valeur réciproque du demi-axe par la longueur d'ondes λ et on divise le produit par le nombre 2π.

Fig. 103.



Au reste nous remarquerons encore qu'il n'y a pas seulement qu'un seul des trois groupes de vibrations subordonnées à un plan d'onde et à une longueur d'onde donnés, qui puisse prendre naissance. Les développements précédents montrent au contraire d'après leur liaison avec les principes de dynamique, qu'il y a encore de possible les mouvements résultant de la coëxistence de deux ou de tous ces groupes, avec quoi en outre le rapport des amplitudes et des phases des mouvements moléculaires peut être tout arbitraire. Enfin il n'y a pas de raison d'exclure des cas possibles la coïncidence dans une même masse d'éther d'autant de mouvements qu'on voudra, tout à fait différents dans leurs attributs. Ces mouvements partiels, sans toutefois s'écarter des lois développées plus haut, se composent ensuite en un seul, comme nous l'avons vu pour les interférences que nous avons examinées dans la première partie.

La suite de cet ouvrage aura seulement pour objet de mettre d'accord avec l'expérience les données que nous avons acquises par la théorie. A cet effet nous reviendrons d'abord aux lois de la propagation de la lumière dans les milieux isotropes, puisque dans la première partie nous avons appris à les connaître par l'expérience.

CHAPITRE II.

Milieux isotropes. — Loi de la Dispersion.

Fresnel avait déjà développé par l'analyse les lois fondamentales de la théorie des ondulations ; mais ses formules n'étaient qu'approchées, eu égard aux phénomènes réels et, comme le montra Poisson, elles donnaient pour la

vitesse de propagation des rayons lumineux dans les milieux simplement réfringents une valeur indépendante de la durée des vibrations, par conséquent de la couleur : la théorie de Fresnel laissait donc le phénomène de la dispersion sans explication. On profita de cette imperfection pour attaquer l'exactitude de la théorie des ondulations, mais M. Cauchy, dans l'ouvrage que nous avons cité, fit disparaître cette objection en s'appliquant à mettre le plus haut degré d'exactitude dans ses calculs. De cette manière il donna non-seulement une explication générale de la dispersion, mais il vérifia aussi ses formules par une comparaison scrupuleuse avec l'expérience. Sans nous étendre sur cette question aussi loin que M. Cauchy, nous reconnaitrons cependant d'une manière suffisante l'accord de la théorie et des faits.

Le caractère des milieux isotropes consiste en ce qu'aucune direction ne s'y distingue des autres. Autour d'un point quelconque suivant toutes les directions l'éther isotrope est constitué de la même manière, ses molécules sont arrangées de la même façon et sollicitées par des forces égales. Il est évident que d'après cela l'ellipsoïde de polarisation aura ici une forme tout à fait symétrique autour de la normale au plan d'ondes : il doit donc se transformer en un ellipsoïde de révolution, dont l'axe de révolution est perpendiculaire au plan d'ondes. Tournons le plan d'ondes E autour de l'origine des coordonnées. La nouvelle surface de polarisation devra, il est vrai, prendre une position différente de sa position primitive, mais ses dimensions ne changent pas. Si nous traduisons ces données en expressions analytiques, nous arrivons, entre les forces d'élasticité et les coordonnées des molécules d'éther, aux équations des conditions qui représentent l'isotropisme de l'éther. Mais nous renonçons ici à faire ces calculs et nous renvoyons au mémoire de Cauchy.

Des trois groupes de vibrations qui correspondent en général à chaque plan d'onde, il y en a donc ainsi un qui est perpendiculaire à ce plan, tandis que les deux autres lui sont parallèles. Les vibrations du premier groupe, comme nous l'avons déjà montré dans la première partie, ne peuvent être perçues ; elles échappent au sens de la vue, dans le cas où elles existeraient réellement. Les deux autres groupes au contraire, qui sont parallèles au plan d'ondes, et par suite perpendiculaires à la direction de la propagation, sont de la même espèce tout à fait que celles que nous avons admises antérieurement dans la lumière polarisée en ligne droite, et nous allons nous en occuper d'une manière toute particulière.

Et d'abord, pour ce qui regarde les directions de ces vibrations, elles ne sont pas ici complétement déterminées. L'ellipsoïde de polarisation possède en effet, outre son axe de révolution, une infinité de diamètres qui jouissent des

propriétés d'un axe, tels sont tous les diamètres du cercle équatorial. Nous pouvons adjoindre à l'axe de rotation deux de ces diamètres perpendiculaires entre eux, comme axes de la surface. Il en résulte que *dans l'éther isotrope, la direction des vibrations parallèles au plan d'ondes est indéterminée,* ou en d'autres termes que *toutes les vibrations qui seront dans le plan d'ondes peuvent y exister, quelle que soit leur direction, et peuvent se propager d'après les lois connues.* En outre, tous les diamètres perpendiculaires à l'axe de rotation étant égaux, *ces vibrations transversales quelle que soit leur direction se propagent toujours avec la même vitesse et cette vitesse reste aussi la même, si la direction de la propagation ou la position du plan d'onde vient à changer.* Nous allons déterminer cette vitesse.

Pour plus de simplicité nous supposerons le plan d'onde perpendiculaire à l'axe des x. Alors l'équation du plan E sera $x = o$ et de l'équation de l'ellipsoïde de polarisation on déduit pour le demi-diamètre se confondant avec l'axe de z, c'est-à-dire, pour le demi-diamètre de l'équateur que nous représenterons par r,

$$r^2 = \frac{1}{N}.$$

Puis la relation entre la vitesse de propagation v et la longueur d'onde λ (voyez page 171) s'exprime par l'équation

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 = N \text{ ou (voyez page 168)}$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 = 2\, m\, \Sigma \left(\frac{f}{\Delta r} + \varphi \frac{\Delta z^2}{\Delta r^3}\right) \text{Sin.}^2 \frac{\pi}{\lambda} \Delta x.$$

Cette équation doit renfermer la loi de la dispersion. Toutefois elle ne peut pas être employée sous cette forme. Il faut la transformer au moyen d'une formule approchée.

A la place de $\text{Sin.} \frac{\pi}{\lambda} \Delta x$ on peut poser :

$$\left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta x\right) - \frac{1}{2.\,3} \left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta x\right)^3 + \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5.} \left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta x\right)^5 - \ldots\ldots$$

alors :

$$v^2 = \frac{m\lambda^2}{2\pi^2} \Sigma \left(\frac{f}{\Delta r} \varphi + \frac{\Delta z^2}{\Delta r^3}\right) \left[\left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta x\right) - \frac{1}{2.\,3} \left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta x\right)^3 + \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5.} \left(\frac{\pi}{\lambda} \Delta x\right)^5 - \ldots\ldots\right]^2.$$

Le second membre peut se développer facilement suivant les puissances paires croissantes de $\frac{1}{\lambda}$. Comme coefficients de ces puissances nous obtiendrons des sommes qui ne dépendent que de la nature même de l'éther. Représentons pour abréger ces coefficients par A_0, A_2,..... il vient :

$$v^2 = A_0 + A_2 \frac{1}{\lambda^2} + A_4 \frac{1}{\lambda^4} + \ldots\ldots$$

Il ne faut pas songer à déterminer directement cette formule qui lie la vitesse de propagation avec la longueur d'onde, puisque, ignorant complétement la nature de la fonction f dans les différents milieux, nous ne sommes pas en état de calculer *a priori* les coefficients A_0 etc. Dès lors M. Cauchy pour en faire une vérification suffisante a employé une méthode indirecte très-détournée; en nous contentant d'un moindre degré d'approximation nous prendrons un moyen plus court, qui fut de même indiqué par M. Cauchy.

Comme la suite nous l'apprendra, les coefficients de ces puissances de $\frac{1}{\lambda}$ supérieurs à la deuxième, sont extrêmement petits, et on peut dès lors sans erreur appréciable poser

$$v^2 = A_0 + A_2 \frac{1}{\lambda^2}.$$

Soit V la vitesse de la lumière dans l'air et Λ la longueur d'onde d'une couleur particulière également dans l'air, alors $\lambda = \Lambda \frac{v}{V}$ par suite :

$$v^2 = A_0 + A_2 V^2 \frac{1}{\Lambda^2 v^2}.$$

On en déduit si, comme c'est ici le cas, on peut négliger les puissances élevées de $\frac{A^2 V^2}{A_0 \Lambda^2 v^2}$.

$$\frac{1}{v} = a_0 + a_2 \frac{1}{\Lambda_2}$$

a_0 et a_2 étant des constantes qui dépendent de la nature du milieu et de la vitesse de la lumière dans l'air. Multiplions cette équation par la valeur V de cette dernière vitesse et posons pour abréger α_0 et α_2 à la place de Va_0, Va_2, il vient :

$$\frac{V}{v} = \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{\Lambda^2}.$$

La valeur de $\frac{V}{v}$ n'est rien autre chose que l'indice de réfraction de la

couleur pour son passage de l'air dans le milieu dont il s'agit : représentons-le par μ :

$$\mu = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{1}{\Lambda^2}.$$

Soient μ_b, μ_c..... μ_h et Λ_b, Λ_c..... Λ_h les valeurs particulières des indices de réfraction et des longueurs d'onde pour les rayons principaux B, C.... H, leur substitution dans la formule trouvée donne les sept équations suivantes :

$$1)\ \mu_b = \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{\Lambda_b{}^2}, \qquad 2)\ \mu_c = \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{\Lambda_c{}^2}, \ldots\ldots$$

$$7)\ \mu_h = \alpha_0 + \alpha_2 \frac{1}{\Lambda_h{}^2}.$$

De ces équations, on déduit facilement la suite de rapports :

$$\mu^h - \mu_g : \mu_g - \mu_f : \ldots\ldots : \mu_c - \mu_b = \frac{1}{\Lambda_h{}^2} - \frac{1}{\Lambda_g{}^2} : \frac{1}{\Lambda_g{}^2} - \frac{1}{\Lambda f_2} \ldots\ldots : \frac{1}{\Lambda_c{}^2} - \frac{1}{\Lambda_b{}^2}.$$

et il est évident que, si réciproquement cette suite de proportions existe, la relation entre μ et Λ est représentée par la formule donnée plus haut.

Frauenhofer a déterminé avec une grande exactitude aussi bien les indices μ pour un certain nombre de milieux isotropes, que les longueurs d'onde Λ. Nous les avons indiqués au supplément de la première partie. Le procédé employé par Frauenhofer comporte une exactitude plus grande que celui de Fresnel, dont nous avons aussi parlé. On peut consulter pour plus de détails le mémoire intitulé : « *Nouvelle modification de la lumière par l'influence réciproque et la diffraction des rayons lumineux, avec l'examen des lois de cette modification* » par J. Frauenhofer : *Nouvelles astronomiques* de Schumacker, 1823, cahier 2.

Les valeurs de Λ_b, etc. qui y sont rapportées en prenant pour unité de longueur le pouce de Paris sont reproduites dans le tableau suivant :

Λ_b	Λ_c	Λ_d	Λ_e	Λ_f	Λg	Λh
0,00002541	0,00002425	0,00002175	0,00001943	0,00001789	0,00001585	0,00001451

Les carrés réciproques de ces valeurs sont entre eux comme les termes de la série suivante :

155, 170, 211, 265, 312, 398, 475,

et alors on a :

$$1)\ \frac{1}{\Lambda_h^2} - \frac{1}{\Lambda_g^2} : \ldots\ldots : \frac{1}{\Lambda_c^2} - \frac{1}{\Lambda_b^2} = 77 : 86 : 47 : 54 : 41 : 15.$$

Prenons maintenant pour vérifier notre formule, par exemple, le flint glass de Frauenhofer n° 13; les valeurs des indices μ_h, $\mu_g \ldots$ μ_b sont dans ce cas :

1,671062, 1,660285, 1,648260, 1,642024, 1,635036, 1,629681, 1,627749.

Et par suite on obtient :

$$\mu_h - \mu_g : \mu_g - \mu_f : \ldots\ldots : \mu_c - \mu_b = 10777 : 12025 : 6236 : 6988 : 5355 : 1932,$$

ou approximativement :

$$2)\quad \mu_h - \mu_g : \ldots\ldots : \mu_c - \mu_b = 80 : 89 : 46 : 52 : 40 : 14.$$

Comparant les suites de rapport 1) et 2), et considérant que les erreurs d'observation dans la détermination des longueurs d'ondes portent chaque fois sur les deux dernières décimales (1), il faut admettre que l'accord de la formule de M. Cauchy avec l'expérience est suffisamment satisfaisant.

Avant que M. Cauchy n'ait publié ses beaux travaux sur les lois de la dispersion, l'anglais Baden-Powell avait cherché empiriquement une formule qui put représenter d'une manière suffisante les mesures de Frauenhofer, et il avait fait connaître les résultats de ses recherches dans plusieurs articles des *Transactions philosophiques* et du *Philosophical magazine*.

En représentant par μ l'indice de réfraction, en passant de l'air dans un milieu donné pour la lumière dont la longueur d'onde est Λ, et par C et D deux constantes qui dépendent de la nature même du milieu, la relation entre μ et Λ s'exprime avec assez d'exactitude, comme Baden-Powell l'a trouvé, par la formule :

$$\frac{1}{\mu} = C\,\frac{\text{Sin.}\,\frac{D}{\Lambda}}{\frac{D}{\Lambda}}.$$

Cette formule, du reste, comme celle que nous avons vérifiée plus haut, n'est qu'une approximation de la formule plus générale de M. Cauchy. A la condition, ce qui est permis, de ne conserver dans cette dernière que les deux premiers termes, la formule de Powell peut aussi être regardée comme l'expression de la loi de la dispersion. En effet si x est assez petit pour qu'on puisse négliger ses puissances supérieures à la seconde, il est permis d'écrire :

(1) Cela se voit dans les différentes séries d'observations que Frauenhofer rapporte dans le mémoire cité.

$$1 - x^2 = \frac{\text{Sin.}\left(x\sqrt{2.\ 3}\right)}{x\sqrt{2.\ 3}}$$

Mais l'expression de $\frac{1}{\mu}$ dans la formule approchée de M. Cauchy peut aussi se ramener à la forme $1 - x^2$. On a en effet :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{v}{V} = \left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{\Lambda^2}\right)^{-1} = \alpha_0 - \alpha_1 \frac{1}{\Lambda} = \alpha_0 \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\frac{1}{\Lambda^2}\right).$$

D'après ce qui précède on a donc :

$$\frac{1}{\mu} = \alpha_0 \frac{\text{Sin.}\left(\frac{1}{\Lambda}\sqrt{2.\ 3\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}\right)}{\frac{1}{\Lambda}\sqrt{2.\ 3\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}}$$

et cette formule se confond avec celle de Povell, si on remplace α_0 par C et $\sqrt{2.\ 3\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}$ par D.

Le rôle important que la dispersion joue dans les phénomènes optiques, justifie pourquoi nous donnons la vérification complète de la dernière formule comme l'a fait Baden-Powell dans ses *Recherches pour établir une théorie de la dispersion de la lumière* (Ann. de Pogg. XXXVII). Les valeurs de Λ prises pour point de départ diffèrent un peu de celles rapportées à la page 176 : leurs quatres derniers chiffres sont : 2541, 2422, 2175, 1945, 1794, 1587, 1464. Les 6 derniers nombres se trouvent dans un mémoire que Frauenhofer a lu en juin 1823 à l'Académie de Munich, mais ne sont pas dans la traduction citée plus haut.

RAYONS.	VALEURS de μ OBSERVÉES.	VALEURS PRISES POUR $\frac{D}{\Lambda}$	VALEURS PRISES POUR C	VALEURS de μ CALCULÉES.
Flint-glass n° 13.				
B	1,6277	16° 10′		1,6275
C	1,6297	16 41		1,6299
D	1,6350	18 55		1,6355
E	1,6420	20 44	1,607	1,6426
F	1,6483	22 31		1,6486
G	1,6603	25 29		1,6609
H	1,6711	27 39		1,6711

RAYONS.	VALEURS de μ OBSERVÉES.	VALEURS PRISES POUR $\frac{D}{A}$	VALEURS PRISES POUR C	VALEURS de μ CALCULÉES.
		Flint-glass n° 23.		
B	1,6265	16° 0′		1,6269
C	1,6285	16 17		1,6278
D	1,6337	18 15		1,6335
E	1,6405	20 22	1,606	1,6405
F	1,6467	22 8		1,6464
G	1,6588	25 2		1,6582
H	1,6697	27 9		1,6697
		Flint-glass n° 30.		
B	1,6236	16° 0′		1,6239
C	1,6255	16 17		1,6246
D	1,6306	18 15		1,6305
E	1,6375	20 22	1,6033	1,6373
F	1,6435	22 8		1,6434
G	1,6554	25 2		1,6551
H	1,6660	27 9		1,6660
		Flint-glass n° 3.		
B	1,6020	15° 20′		1,6000
C	1,6038	16 5		1,6039
D	1,6085	17 55		1,6079
E	1,6145	19 59	1,582	1,6145
F	1,6200	21 42		1,6204
G	1,6308	24 33		1,6313
H	1,6404	26 39		1,6404
		Crown-glass Litt. M.		
B	1,5548	12° 19′		1,5548
C	1,5559	12 55		1,5561
D	1,5591	14 23		1,5593
E	1,5632	16 5	1,543	1,5634
F	1,5667	17 26		1,5671
G	1,5735	19 42		1,5738
H	1,5795	21 22		1,5792

RAYONS.	VALEURS de μ OBSERVÉES.	VALEURS PRISES POUR $\frac{D}{A}$	VALEURS PRISES POUR C	VALEURS de μ CALCULÉES.
		Crown-glass n° 13.		
B	1,5243	11° 18′		1,5243
C	1,5253	11 51		1,5252
D	1,5280	13 12		1,5279
E	1,5314	14 46	1,5145	1,5314
F	1,5343	16 0		1,5343
G	1,5399	18 5		1,5399
H	1,5447	19 37		1,5444
		Crown-glass n° 9.		
B	1,5258	11° 18′		1,5259
C	1,5269	11 51		1,5269
D	1,5296	13 12		1,5296
E	1,5330	14 46	1,5162	1,5332
F	1,5360	16 0		1,5360
G	1,5416	18 5		1,5416
H	1,5466	19 37		1,5462
		Essence de térébenthine.		
B	1,4705	12° 25′		1,4703
C	1,4715	13 1		1,4715
D	1,4744	14 30		1,4746
E	1,4783	16 13	1,459	1,4786
F	1,4817	17 35		1,4821
G	1,4882	19 51		1,4886
H	1,4939	21 32		1,4938
		Dissolution de potasse.		
B	1,3996	10° 54′		1,3999
C	1,4005	11 5		1,4008
D	1,4028	12 20		1,4029
E	1,4056	13 10	1,3922	1,4044
F	1,4081	14 57		1,4080
G	1,4126	16 55		1,4126
H	1,4164	18 20		1,4162

RAYONS.	VALEURS de μ OBSERVÉES.	VALEURS PRISES POUR $\frac{D}{A}$	VALEURS PRISES POUR C	VALEURS de μ CALCULÉES.
		Eau.		
B	1,3309	9° 54′		1,3309
C	1,3317	10 25		1,3315
D	1,3336	11 36		1,3333
E	1,3358	12 57	1,3243	1,3385
F	1,3378	14 3		1,3376
G	1,3413	15 51		1,3413
H	1,3442	17 11		1,3443

CHAPITRE III.

Milieux anisotropes en général.

A. STRUCTURE DES CRISTAUX.

Les corps amorphes qui sont caractérisés dans leur structure intime, comme aussi dans leurs limites extérieures, par des propriétés identiques dans toutes les directions, par l'isotropisme, sont sous ce double rapport tout à fait différents des corps cristallisés. Quant à sa forme, le cristal est limité par une surface polyédrique, qui dépend de sa nature chimique. A la première vue on y remarque déjà à l'extérieur des lignes particulières : ainsi la surface polyédrale est, par rapport à la direction d'une arête déterminée, dans une relation de position tout autre que par rapport à la direction d'une autre arête. Une différence analogue s'observe aussi dans les autres propriétés physiques, dans la cohésion, l'électricité, le magnétisme, et particulièrement dans les propriétés optiques. Nous attribuons tout d'abord cette nature remarquable des cristaux à un arrangement particulier de leurs molécules, nous supposons que ces dernières sont à des distances inégales suivant des directions différentes, et par suite de cela ou aussi indépendamment de cela, sont

sollicitées par des forces intérieures d'inégale intensité. Mais pour conserver l'homogénéité à côté de l'anisotropisme, nous admettons que, suivant chaque direction particulière, la distance de deux molécules consécutives et les forces qui agissent entre elles restent les mêmes. Ce qui confirme en particulier cette manière de voir c'est la loi même de la cristallisation, c'est-à-dire, la règle d'après laquelle les cristaux sont limités par des faces planes. Il nous paraît convenable d'entrer dans quelques détails à ce sujet.

Pour représenter analytiquement une des faces qui limitent un cristal, que ce soit un minéral ou un produit chimique, on prend pour base un système de coordonnées dans l'espace, et l'on cherche l'inclinaison de la normale à cette face avec les trois axes. Soient α, β, γ ces angles, alors, non pas *quant à sa position réelle*, mais *quant à sa direction*, cette face sera représentée par l'équation : x Cos. $\alpha + y$. Cos. $\beta + z$ Cos. $\gamma = 0$. Prenons maintenant trois faces quelconques de la forme cristalline elle-même pour plans coordonnés, la trigonométrie sphérique donne facilement les trois angles α, β, γ pour chaque face, au moyen des angles dièdres du cristal qu'on pourra mesurer. De ce système de coordonnées, on peut au moyen des formules de transformation de la géométrie analytique, passer à un autre quelconque et obtenir par rapport à ce nouveau système les expressions analytiques des faces du cristal. En général, parmi tous les systèmes possibles on choisit celui pour lequel toutes les faces du cristal sont ramenées à avoir entre elles la relation la plus simple. Si x, y, z représentent les coordonnées d'un *système ainsi déterminé, et α, β, γ les angles d'inclinaison de la normale à une face quelconque avec les axes coordonnés, toute autre face sera représentée, si l'on ne veut de nouveau considérer que sa direction, par une équation de la forme,* $\mathfrak{a}$ Cos. α. $x + \mathfrak{b}$ Cos. β. $y + \mathfrak{c}$ Cos. γ. $z = 0$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *étant des nombres rationnels*. C'est là la seule loi générale connue de la cristallisation.

Les axes du système de coordonnées, choisi comme nous l'avons dit, se nomment *axes du cristal* ou *de cristallisation*. Les rapports des constantes Cos. α, Cos. β, Cos. γ, dans les équations des faces sont en général irrationnels et changent d'une espèce de cristal à l'autre, tandis que pour les individus ils ont une seule valeur constante et peuvent dès lors être pris comme un caractère certain.

Les nombres rationnels $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ peuvent, il est vrai, sans que la loi générale de la cristallisation soit violée, atteindre une valeur très-grande, comme d'autre part ils peuvent s'approcher indéfiniment de zéro ; mais l'observation nous apprend que, quand ils sont entiers, ils sont toujours très-petits, et que, quand ils sont fractionnaires, les deux termes de la fraction sont aussi de petits

nombres. Dans chaque cas particulier leur valeur dépend, comme on le comprend, du choix de la face à laquelle correspondent les angles α, β, γ. Il en résulte que du nombre infiniment grand de faces que la loi de la cristallisation indique comme possible dans une espèce cristalline, celle-ci n'en présente en réalité qu'un nombre proportionnellement très-restreint. On les réunit en groupes pour lesquels les termes $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ possèdent les mêmes valeurs absolues. En général un pareil groupe renferme quatre faces différentes. Soient par exemple, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ les valeurs absolues de ces coefficients pour une face quelconque, nous pourrons combiner avec celle-ci, les trois faces dont les coéfficients s'accordent avec un des systèmes suivants :

$$\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', -\mathfrak{c}'; \; \mathfrak{a}', -\mathfrak{b}', \mathfrak{c}'; \; -\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'.$$

Si en particulier un coefficient devient nul, nous obtenons à la place d'un groupe de quatre faces, seulement deux faces avec des coefficients égaux en valeur absolue. Ainsi, par exemple, à la face $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, 0 s'adjoint seulement la face $\mathfrak{a}'$, $-\mathfrak{b}'$, 0, toutes deux se coupent suivant l'axe des z.

Enfin les faces ayant deux coefficients égaux à zéro sont isolées. Il ne peut y en avoir que trois, et elles sont parallèles aux plans coordonnés. Leurs coefficients sont respectivement :

$$\mathfrak{a}'\ 0, 0; \qquad 0, \mathfrak{b}', 0; \qquad 0, 0, \mathfrak{c}'.$$

Les plans que nous avons considérés jusqu'à présent ne donnent que la direction des faces qui forment le cristal, ou qu'on peut regarder comme les faces du polyèdre qui le limite, et il est clair qu'à chacun de ces plans auxiliaires correspondent deux faces du polyèdre qui lui sont parallèles. Nous supposerons chaque fois celles-ci à la même distance des deux côtés du plan auxiliaire. De cette manière, avec un groupe de quatre plans auxiliaires à coefficients égaux, nous obtenons quatre paires de faces qui, d'après la supposition faite sur leurs distances aux plans auxiliaires, limitent un *octaèdre* dont les axes se confondent avec les axes coordonnés. (Voyez figure 104.) De même un groupe de deux plans auxiliaires avec des coefficients égaux donne un prisme à 4 pans à section rhomboïdale, dont l'axe se confond avec l'axe coordonné auquel se rapporte le coefficient qui est nul. (Voyez fig. 105, 106, 107.)

Enfin chacun des plans auxiliaires, qui se confond avec un plan coordonné, donne une paire de faces indépendantes.

D'après ce qui précède nous pouvons considérer toutes les faces d'un cristal comme appartenant à un octaèdre, un prisme, ou une paire de faces, et cette manière de voir non-seulement facilite la description d'une forme cristalline donnée, mais aussi groupe ensemble les faces qui ont entre elles des rapports naturels. L'octaèdre, le prisme et la paire de faces sont d'après cela considérés

comme les limites élémentaires des formes cristallines : et l'on ramène les faces de ces dernières à celles de ces formes primitives.

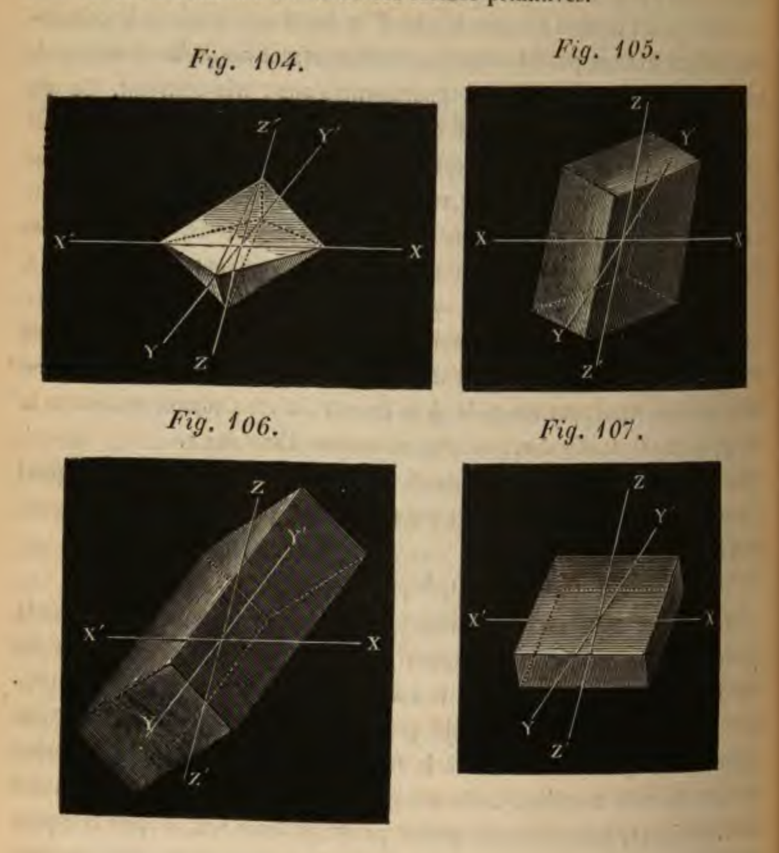


Fig. 104. *Fig. 105.* *Fig. 106.* *Fig. 107.*

On a aussi imaginé pour représenter les faces des cristaux une notation simple et commode, fondée sur ce qui précède. On détermine les valeurs α, β, γ pour l'octaèdre d'une espèce cristalline dont les faces paraissent formées le plus fréquemment et en même temps le plus complétement, et on cherche ensuite, pour toutes les faces qui se présentent, les valeurs absolues des coefficients $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Supposons que pour une face ils soient $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$; alors cette face et toutes celles qui, avec elle, se groupent pour donner une forme élémentaire, on les représente par le symbole

$$(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'),$$

qui détermine chaque face en particulier et fait voir facilement ses rapports avec toutes les autres. D'après cela, l'octaèdre particulier dont le symbole est

posé, on a évidemment, en appelant $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, etc., des nombres entiers :

$$x' = \mathfrak{a}'\delta x,\quad y' = \mathfrak{b}'\delta y,\quad z' = \mathfrak{c}'\delta z;\quad x'' = \mathfrak{a}''\delta x,\quad y'' = \mathfrak{b}''\delta y,$$
$$z'' = \mathfrak{c}''\delta z, \text{ etc.}$$

si δx, δy, δz sont les distances des molécules dans les directions des axes coordonnés. La substitution de ces valeurs dans la valeur de a, donne en représentant par $\mathfrak{A}$ un nombre rationnel :

$$a = \mathfrak{A}\frac{1}{\delta x}$$

De même, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ étant des nombres rationnels,

$$b = \mathfrak{B}\frac{1}{\delta y} \text{ et } c = \mathfrak{C}\frac{1}{\delta z}$$

L'équation du plan prend alors la forme :

$$\mathfrak{A}\frac{1}{\delta x}x + \mathfrak{B}\frac{1}{\delta y}y + \mathfrak{C}\frac{1}{\delta z}z = 1$$

qui devient en transportant le plan à l'origine

$$\mathfrak{A}\frac{1}{\delta x}x + \mathfrak{B}\frac{1}{\delta y}y + \mathfrak{C}\frac{1}{\delta z}z = o$$

et puisque les rapports $\frac{1}{\delta x}$, $\frac{1}{\delta y}$, $\frac{1}{\delta z}$ restent constant, celle-ci s'accorde parfaitement avec l'équation de la page 182, qui exprime la loi de la cristallisation pour une face cristalline possible, si nous laissons les directions des lignes parallèles correspondre aux axes du cristal. Enfin, d'après la structure admise du corps cristallisé, ce qui paraît le plus vraisemblable, c'est que parmi toutes les faces possibles, celles-là se réaliseront surtout de préférence, sur lesquelles les molécules seront les plus voisines, et ce sont précisément celles pour lesquelles le rapport des coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ s'exprime par les plus petits nombres rationnels, par conséquent ce sont bien les faces telles que nous les observons dans la nature.

Parmi la multitude de formes que nous offre le règne minéral, celles qui peuvent se rapporter à un système d'axes orthogonaux se font remarquer par leur simplicité. Nous leur attribuerons, à cause de ce qui précède, une structure telle que les molécules y sont placées aux sommets de parallélépipèdes rectangulaires égaux qui en se touchant par leurs faces latérales remplissent le volume du cristal. Les arêtes du parallélépipède sont parallèles aux axes

du cristal, et les longueurs de ces arêtes sont égales aux distances de deux molécules voisines dans les directions des axes cristallins. On est conduit en outre à attribuer à l'éther de ces corps une constitution toute analogue, aussi nous admettrons que ses molécules sont également distribuées parallélépipédiquement : elles sont sur les intersections de trois groupes de plans parallèles à deux axes du cristal, et les plans d'un seul et même groupe sont également distants l'un de l'autre, mais cette distance varie d'un groupe à l'autre. Comme conséquence immédiate d'une pareille constitution nous voyons que l'éther sera homogène et anisotrope et qu'il sera symétrique par rapport aux trois plans octogonaux des axes cristallins, comme on devait l'admettre *a priori*, puisque les mêmes plans se présentent aussi comme plans de symétrie pour la surface limite du cristal et aussi pour toutes les autres propriétés physiques. D'après cela on nomme ces plans, *sections principales*, aussi bien au point de vue cristallographique, qu'au point de vue optique. Leurs intersections, ou plutôt les directions de ces intersections (car dans un milieu homogène on s'occupe des directions et non pas des positions absolues des lignes) s'appellent, eu égard à leur importance optique, *axes principaux optiques*. Nous démontrerons plus tard par l'expérience que l'hypothèse précédente sur la constitution de l'éther anisotrope, nous suffit encore pour expliquer les propriétés optiques dans les cristaux dont les axes forment des angles aigus, en ne nous en tenant toutefois qu'à de simples approximations : celles-ci cependant possèdent déjà un haut degré d'exactitude et nous sommes en outre forcés de nous en contenter dans l'état actuel de la science.

Au reste quand même les hypothèses que nous avons posées plus haut sur la structure des cristaux et la constitution de leur éther ne seraient pas générales, quand bien même elles ne s'accorderaient nullement avec la réalité, cependant les développements suivants ne perdraient rien de leur importance dans ce qu'ils ont d'essentiel (1). Seulement pour leur donner une forme plus claire et les dépouiller autant que possible de toute abstraction, nous nous appuierons sur ces hypothèses. L'application des conséquences que nous en tirerons, établira seulement les conditions d'après lesquelles nous pourrions nous faire une autre idée de la constitution de l'éther, et nous arriverons du reste aux mêmes lois par des routes parallèles.

(1) Nous ferons observer toutefois d'une manière particulière, que les remarquables relations que l'on a découvertes nouvellement entre la forme cristalline et la composition chimique, rendent au moins très-vraisemblable l'hypothèse snr la structure des cristaux. Delafosse : sur le plésiomorphisme. *Comptes rendus*, avril 1851.

B. ACTION OPTIQUE DES CRISTAUX.

D'après notre hypothèse sur la nature des forces élastiques de l'éther lumineux, la majeure partie de l'action à laquelle est soumise une molécule d'éther sera circonscrite aux molécules qui l'entourent de plus près. Dès lors s'il ne s'agit que d'une simple approximation, il est permis de ne pas faire attention aux molécules auxquelles correspondent des valeurs trop grandes de Δx, Δy, Δz et Δr, et en outre de négliger dans nos formules les quotients de la forme $\frac{\Delta x^a \;\Delta y^b \;\Delta z^c}{\Delta r}$ et $\frac{\Delta x^a \;\Delta y^b \;\Delta z^c}{\Delta r^3}$, aussitôt que $a + b + c - 1$ ou $a + b + c - 3$ est plus grand que l'unité. Si cela a lieu, comme Δx, Δy, Δz et Δr sont du même ordre, les quotients précédents sont d'un ordre plus élevé que la première puissance de l'une de ces dernières quantités et on peut les négliger par rapport à celles-ci. En ne tenant pas compte de ces termes, le caractère général des lois de la lumière ne change pas, mais bien leur caractère quantitatif. Ainsi, par exemple, dans les milieux isotropes nous obtenons comme précédemment pour surface de polarisation un ellipsoïde de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan des ondes et conserve les mêmes dimensions pour toutes les positions de ce dernier. Mais pour la vitesse de propagation nous trouvons d'après la formule de la page 174 :

$$v^2 = \frac{m}{2} \Sigma \left(\frac{f \,\Delta x^2}{\Delta r} + \frac{\varphi \,\Delta x^2 \,\Delta z^2}{\Delta r^3} \right) = \mathrm{A}_0,$$

valeur indépendante de la longueur d'onde. Le caractère du mouvement est bien resté le même, si nous ne considérons que la lumière homogène, tandis que la valeur de ses constantes, fournie par la théorie, s'écarte plus ou moins de la valeur réelle suivant la nature du milieu et la couleur considérée, et, si les lois théoriques doivent être mises d'accord avec les lois empiriques, il faudra chaque fois remplacer la valeur théorique par celle réellement observée. Admettant qu'il en est de même pour les milieux anisotropes, nous procéderons maintenant comme il suit :

Nous prendrons comme système de coordonnées trois lignes droites menées par une molécule d'éther parallèlement aux trois axes principaux optiques. Δx, Δy, Δz représentant de nouveau les distances de deux molécules parallèles aux axes, et les quotients $\frac{\Delta x^a \;\Delta y^b \;\Delta z^c}{\Delta r}$ et $\frac{\Delta x^a \;\Delta y^b \;\Delta z^c}{\Delta r^3}$ pouvant être négligés si $a + b + c > 2$ et $a + b + c > 4$, on aura : (Voyez page 164) :

$$L = 2\,m\,\frac{\pi^2}{\lambda^2}\,\Sigma\left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\varphi\,\Delta x^2}{\Delta r^3}\right)\left(\mathrm{u}^2\,\Delta x^2 + \mathrm{v}^2\,\Delta y^2 + \mathrm{w}^2\,\Delta z^2 + 2\,\mathrm{u}\mathrm{v}\,\Delta x\,\Delta y + 2\,\mathrm{u}\,\mathrm{w}\,\Delta x\,\Delta z + 2\,\mathrm{v}\,\mathrm{w}\,\Delta y\,\Delta z\right),$$

$$M = 2m\,\frac{\pi^2}{\lambda^2}\,\Sigma\left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\varphi\,\Delta y^2}{\Delta r^3}\right)\left(\mathrm{u}^2\,\Delta x^2 + \ldots\right),$$

$$N = 2m\,\frac{\pi^2}{\lambda^2}\,\Sigma\left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\varphi\,\Delta z^2}{\Delta r^3}\right)\left(\mathrm{u}^2\,\Delta x^2 + \ldots\right),$$

$$P = 2m\,\frac{\pi^2}{\lambda^2}\,\Sigma\,\frac{\varphi\,\Delta y\,\Delta z}{\Delta r^3}\left(\mathrm{u}^2\,\Delta x^2 + \ldots\right),$$

$$Q = 2m\,\frac{\pi^2}{\lambda^2}\,\Sigma\,\frac{\varphi\,\Delta x\,\Delta z}{\Delta r^3}\left(\mathrm{u}^2\,\Delta x^2 + \ldots\right),$$

$$R = 2m\,\frac{\pi^2}{\lambda^2}\,\Sigma\,\frac{\varphi\,\Delta x\,\Delta y}{\Delta r^3}\left(\mathrm{u}^2\,\Delta x^2 + \ldots\right).$$

Représentons les distances de deux molécules consécutives dans les directions des axes coordonnées par δx, δy et δz, on aura évidemment, si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont des nombres entiers, pour une molécule quelconque P_r :

$$\Delta x_r = \mathfrak{a}\delta x,\ \Delta y_r = \mathfrak{b}\delta y,\ \ \Delta z_r = \mathfrak{c}\delta z.$$

Outre la molécule P_r il y a encore à cause de la structure parallélépipédique de l'éther, sept autres molécules et seulement sept pour lesquelles Δx, Δy, Δz et par conséquent aussi Δr ont les mêmes valeurs absolues que pour P_r. Nous réunissons ici les groupes des valeurs Δx, etc. pour ces molécules :

$$\begin{array}{lll}
\Delta x = \mathfrak{a}\delta x, & \Delta y = \mathfrak{b}\delta y, & \Delta z = -\,\mathfrak{c}\delta z;\\
\Delta x = \mathfrak{a}\delta x, & \Delta y = -\,\mathfrak{b}\delta y, & \Delta z = \mathfrak{c}\delta z;\\
\Delta x = -\,\mathfrak{a}\delta x, & \Delta y = \mathfrak{b}\delta y, & \Delta z = \mathfrak{c}\delta z;\\
\Delta x = \mathfrak{a}\delta x, & \Delta y = -\,\mathfrak{b}\delta y, & \Delta z = -\,\mathfrak{c}\delta z;\\
\Delta x = -\,\mathfrak{a}\delta x, & \Delta y = \mathfrak{b}\delta y, & \Delta z = -\,\mathfrak{c}\delta z;\\
\Delta x = -\,\mathfrak{a}\delta x, & \Delta y = -\,\mathfrak{b}\delta y, & \Delta z = \mathfrak{c}\delta z;\\
\Delta x = -\,\mathfrak{a}\delta x, & \Delta y = -\,\mathfrak{b}\delta y, & \Delta z = -\,\mathfrak{c}\delta z.
\end{array}$$

Nous pouvons diviser ainsi toute la masse de l'éther en pareils groupes de huit molécules, et d'après cela les termes sous le signe Σ dans les valeurs de L.... R se coordonnent en huit groupes; et dans la somme totale tous les termes renfermant une des quantités Δx, Δy, Δz à une puissance impaire, disparaîtront évidemment, puisqu'alors ils seront toujours deux à deux de signes contraires mais égaux en valeur absolue. Dès lors les expressions des coefficients de l'ellipsoïde de polarisation se réduisent aux suivantes :

$$L = 2m\frac{\pi^2}{\lambda^2}\Sigma\left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\varphi\Delta x^2}{\Delta r^3}\right)(u^2\Delta x^2 + v^2\Delta y^2 + w^2\Delta z^2),$$

$$M = 2m\frac{\pi^2}{\lambda^2}\Sigma\left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\varphi\Delta y^2}{\Delta r^3}\right)(u^2\Delta x^2 + v^2\Delta y^2 + w^2\Delta z^2),$$

$$N = 2m\frac{\pi^2}{\lambda^2}\Sigma\left(\frac{f}{\Delta r} + \frac{\varphi\Delta z^2}{\Delta r^3}\right)(u^2\Delta x^2 + v^2\Delta y^2 + w^2\Delta z^2),$$

$$P = 4m\frac{\pi^2}{\lambda^2}\Sigma\frac{\varphi\Delta y^2\,\Delta z^2}{\Delta r^3}\,v\,w,$$

$$Q = 4m\frac{\pi^2}{\lambda^2}\Sigma\frac{\varphi\Delta x^2\,\Delta z^2}{\Delta r^3}\,u\,w,$$

$$R = 4m\frac{\pi^2}{\lambda^2}\Sigma\frac{\varphi\Delta x^2\,\Delta y^2}{\Delta r^3}\,u\,v.$$

Posons pour abréger :

$$\frac{m}{2}\Sigma\frac{f\Delta x^2}{\Delta r} = \xi^2, \quad \frac{m}{2}\Sigma\frac{f\Delta y^2}{\Delta r} = \eta^2, \quad \frac{m}{2}\Sigma\frac{f\Delta z^2}{\Delta r} = \zeta^2,$$

$$\frac{m}{2}\Sigma\frac{\Delta y^2\,\Delta z^2}{\Delta r^3} = \mu^2, \quad \frac{m}{2}\Sigma\frac{\varphi\Delta x^2\,\Delta z^2}{\Delta r^3} = \nu^2, \quad \frac{m}{2}\Sigma\frac{\varphi\Delta x^2\,\Delta y^2}{\Delta r^3} = \varpi^2$$

$$\frac{m}{2}\Sigma\frac{\varphi\Delta x^4}{\Delta r^3} = p^2, \quad \frac{m}{2}\Sigma\frac{\varphi\Delta y^4}{\Delta r^3} = q^2, \quad \frac{m}{2}\Sigma\frac{\varphi\Delta z^4}{\Delta r^3} = r^2,$$

on aura pour les coefficients précédents ;

$$L = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}[u^2(\xi^2 + p^2) + v^2(\eta^2 + \varpi^2) + w^2(\zeta^2 + \nu^2)],$$

$$M = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}[u^2(\xi^2 + \varpi^2) + v^2(\eta^2 + q^2) + w^2(\zeta^2 + \mu^2)],$$

$$N = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}[u^2(\xi^2 + \nu^2) + v^2(\eta^2 + \mu^2) + w^2(\zeta^2 + r^2)],$$

$$P = 8\frac{\pi^2}{\lambda^2}\mu^2 vw, \quad Q = 8\frac{\pi^2}{\lambda^2}\nu^2 uw, \quad R = 8\frac{\pi^2}{\lambda^2}\varpi^2 uv.$$

En transportant ces expressions dans l'équation de l'ellipsoïde de polarisation et divisant ensuite le terme constant par $\frac{\lambda^2}{4\pi^2}$, l'équation résultante n'appartient plus à l'ellipsoïde de polarisation primitif, mais à un autre nouvel ellipsoïde, concentrique au premier, semblable et semblablement disposé, et dont les dimensions sont à celles du premier comme $\frac{2\pi}{\lambda} : 1$. Comme il fallait multiplier les valeurs réciproques des demi-axes principaux du premier par $\frac{\lambda}{2\pi}$

pour obtenir la vitesse de propagation des vibrations qui leur sont parallèles, la seconde surface nous donne immédiatement ces quantités par les valeurs réciproques de ses demi-axes. Cet ellipsoïde, qui pour le reste s'accorde complétement avec l'ellipsoïde de polarisation de M. Cauchy, nous l'appellerons le *second ellipsoïde* de polarisation : son équation est :

$$\begin{aligned} & x^2 [\mathrm{u}^2 (\xi^2 + p^2) + \mathrm{v}^2 (\eta^2 + \varpi^2) + \mathrm{w}^2 (\zeta^2 + \nu^2)] \\ + & y^2 [\mathrm{u}^2 (\xi^2 + \varpi^2) + \mathrm{v}^2 (\eta^2 + q^2) + \mathrm{w}^2 (\zeta^2 + \mu^2)] \\ + & z^2 [\mathrm{u}^2 (\xi^2 + \nu^2) + \mathrm{v}^2 (\eta^2 + \mu^2) + \mathrm{w}^2 (\zeta^2 + r^2)] \\ + & 4 \mu^2 \mathrm{v\,w} yx + 4 \nu^2 \mathrm{u\,w}\, xz + 4 \varpi^2 \mathrm{uv}\, yx = 1. \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, il faut chercher à déterminer les rapports mutuels des grandeurs ξ.. , p .., μ... ; alors seulement on pourra simplifier l'équation de l'ellipsoïde de polarisation et lui donner peut-être une nouvelle forme qui nous révèlera des lois plus faciles à saisir. Si nous ne pouvons plus nous confier simplement et uniquement à la théorie, car nous ne savons rien de certain sur la nature des fonctions f et φ, il paraît donc naturel de demander ces rapports à l'expérience. C'est pourquoi, dans les développements ultérieurs, nous nous guiderons d'après les déterminations optiques faites avec tant de soins par le physicien suédois Rudberg, et nous choisirons entre autres celles qu'il fit sur la topaze. Mais avant tout il ne sera pas inutile d'étudier un peu à fond les propriétés cristallographiques de ce corps, pour éclaircir par cet exemple les considérations générales indiquées sous la rubrique A.

Les cristaux les plus parfaits se présentent sous la forme représentée de profil dans la figure 108 et vue d'en haut dans la figure 109. La figure 110 est une

Fig. 108.



Fig. 109.



section horizontale. On remarque dans un de ces cristaux les faces suivantes.

1) Huit faces verticales P et p. Les quatre faces P forment sur l'arête verticale K un angle de 124° 19′, tandis que les faces des deux paires p se rencontrent suivant les arêtes k sous un angle de 93° 8′. L'angle compris entre une face P et la face adjacente p est de 161° 16′,5, d'où il résulte que deux faces opposées P ou p sont parallèles entre elles, et les plans qui partagent en deux les angles des arêtes K et k sont perpendiculaires l'un à l'autre. Nous choisissons un système de plans coordonnés dont l'un est horizontal, les deux autres verticaux et parallèles aux plans bissecteurs des angles dièdres K et k, et nous comptons les x de droite à gauche, les y d'avant en arrière, et enfin les z de haut en bas.

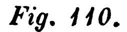


Fig. 110.



Alors les deux paires de faces parallèles P, en ne tenant compte que de leur direction sont représentées par les équations :

$$\text{Cos. } 27° \ 50', 5. \ x + \text{Cos. } 62° \ 9', 5. \ y = 0$$
$$\text{Cos. } 27° \ 50', 5. \ x - \text{Cos. } 62° \ 9', 5. \ y = 0$$

de même on trouve pour les deux paires de faces p :

$$\text{Cos. } 46° \ 34'. \ x + \text{Cos. } 43° \ 26'. \ y = 0$$
$$\text{Cos. } 46° \ 34'. \ x - \text{Cos. } 43° \ 26'. \ y = 0.$$

Mais maintenant :

$$\frac{\text{Cos. } 43° \ 26'}{\text{Cos. } 46° \ 34'} = 2 \frac{\text{Cos. } 62° \ 9' \ 5}{\text{Cos. } 27° \ 50', 5}$$

Alors à la place des deux dernières équations nous pouvons poser :

$$\text{Cos. } 27° \ 50', 5. \ x + 2 \text{ Cos. } 62° \ 9' \ 5. \ y = 0$$
$$\text{Cos. } 27° \ 50', 5. \ x - 2 \text{ Cos. } 62° \ 9' \ 5. \ y = 0$$

Nous voyons donc d'après cela qu'il est permis de rapporter les faces P et p aux axes coordonnés comme axes cristallins. Ce sont alors des faces prismatiques (page 185). Les faces P appartiennent à un prisme rhombique vertical dont l'axe est l'axe des z, dont la plus courte et la plus longue diagonale sont respectivement parallèles à l'axe des x et à celui des y. Les faces p appartiennent aussi à un prisme vertical à base rhombe; la grande diagonale de celle-ci se confond ici avec l'axe des x et la plus courte avec la direction de l'axe des y.

Toutefois nos axes de coordonnées ne pourront être regardés comme axes cristallins qu'autant que les autres faces pourront se représenter aussi simplement que celles que nous venons d'examiner. Or nous remarquons :

2) La face s, qui se distingue en ce que la topaze se laisse facilement cliver parallèlement à sa direction. Elle est perpendiculaire aux faces P et p, et partant aussi à l'axe des z et peut se représenter par l'équation $z = 0$.

3) La paire de faces π forme avec les faces p qui la rencontrent des angles égaux, et est parallèle à l'axe des x. Par rapport à la face terminale s, les faces π sont inclinées de 136° 29',5 et sont représentées dès lors par les équations

$$\text{Cos. } 46^\circ\, 29',5 .\ y + \text{Cos. } 43^\circ\, 30',5 .\ z = 0$$
$$\text{Cos. } 46^\circ\, 29',5 .\ y - \text{Cos. } 43^\circ\, 30',5 .\ z = 0$$

Les faces π appartiennent à un prisme horizontal à section rhomboïdale, son axe se confond avec l'axe des x et sa grande et sa petite diagonale avec l'axe des z et celui des y.

4) Les quatre faces marquées o, sont également inclinées sur les trois plans coordonnés et on déduit des angles de leurs arêtes pour leurs inclinaisons respectives sur les plans des yz, des xz et des xy les valeurs :

$$50^\circ\, 56' ;\ 70^\circ\, 33',5 ;\ \text{et } 45^\circ\, 27',5.$$

Il en résulte pour l'équation de la face o placée en avant et à droite

$$\text{Cos. } 50^\circ\, 56' .\ x + \text{Cos. } 70^\circ\, 33',5 .\ y + \text{Cos. } 45^\circ\, 27',5 .\ z = 0.$$

Tous les plans analogues à cette face forment évidemment un octaëdre, et comme il se présente le plus souvent et le plus nettement nous le choisirons pour octaëdre fondamental. Le rapport fondamental des formes de la topaze est alors :

$$\text{Cos. } \alpha : \text{Cos. } \beta : \text{Cos. } \gamma = \text{Cos. } 50^\circ\, 56' : \text{Cos. } 70^\circ\, 33',5 : \text{Cos. } 45^\circ\, 27',5$$

et au moyen de ce rapport on doit avoir pour toutes les faces dont nous avons parlé des symboles simples.

Le symbole des faces o est (1, 1, 1).

Les coefficients des faces π sont 0, Cos. 46° 29',5, Cos. 43° 30',5, et leur rapport peut évidemment se remplacer par 0, Cos. 70° 33',5, et $\frac{1}{2}$ Cos. 45° 27',5, d'où le symbole (0. 1. $\frac{1}{2}$).

Pour s nous trouvons le symbole (0, 0, 1).

Pour le rapport des coefficients dans les équations de p on peut poser : $\frac{1}{2}$ Cos. 50° 56' : Cos. 70° 33',5 et alors ces faces se représentent par ($\frac{1}{2}$, 1, 0).

Enfin les coefficients dans les équations de P sont entre eux comme Cos. 50° 56' : Cos. 70° 33',5 et par conséquent on a pour ces faces le symbole (1, 1, 0).

D'après tout cela nous ne devons pas hésiter à admettre que nos axes coordonnés donnent les directions des axes de cristallographie. La topaze est donç

un cristal avec trois axes rectangulaires. L'un d'eux est perpendiculaire à la face de clivage s, et est parallèle à l'axe du prisme P, les deux autres se confondent avec les diagonales de ce prisme. Les sections principales sont parallèles à la base et aux plans diagonaux de P.

Passons maintenant aux propriétés optiques de la topaze. Dans un cristal transparent de ce minéral on taille, comme l'a fait Rudberg, trois prismes dont les arêtes de réfringence sont parallèles aux axes cristallins ou axes principaux optiques. On trouve alors qu'un rayon de lumière qui est polarisé perpendiculairemennt à l'arête d'un pareil prisme, et qui le rencontre dans une direction perpendiculaire à l'arête, est réfracté et décomposé en ses éléments colorés, absolument comme si le prisme était formé d'une substance isotrope. Du minimum de déviation d'un rayon d'une couleur déterminée, on peut déduire l'indice de réfraction de celle-ci. Chacun des prismes donne pour cet indice une valeur différente. Ainsi, pour la portion du spectre désignée par F, Rudberg trouva dans un prisme dont l'arête était parallèle à l'axe des z 1,61701 ; dans un deuxième prisme dont l'arête était parallèle aux y 1,62652 ; enfin dans un troisième dont l'arête était parallèle aux x, 1,61914. Et ces nombres ne changent pas, de quelque manière que soient situées les faces latérales du prisme par rapport aux axes du cristal, pourvu qu'elles soient parallèles à l'un d'eux. Seulement suivant la position de ces faces et l'angle qu'elles forment, la position du rayon soumis à l'expérience change par rapport aux axes du cristal, en sorte qu'étant toujours perpendiculaire à l'un d'entre eux (à celui qui est parallèle à l'arête de réfringence et à la direction des vibrations), il fait toujours au contraire avec les deux autres axes des angles inégaux. De ces expériences nous conclurons donc : qu'un rayon de lumière dont les vibrations sont parallèles à un axe principal optique et qui se meut perpendiculairement à ce même axe, se propage avec la même vitesse, quelle que soit du reste sa direction : mais que cette vitesse est différente suivant que le rayon et son plan de polarisation sont perpendiculaires à l'un ou à l'autre des axes principaux, ou en d'autres termes : que *la vitesse des ondes planes qui sont parallèles à un axe principal optique, et dont les vibrations se propagent en restant parallèles à cet axe, reste constante, de quelque manière que tourne le plan, et que cette vitesse change d'un axe à l'autre.* L'expression analytique de ce fait que l'on peut constater directement dans d'autres milieux et dans tous par ses conséquences, simplifie considérablement, comme nous allons le voir de suite, l'équation du second ellipsoïde de polarisation et toutes les considérations qu'on en peut déduire.

Pour tout plan, qui, par exemple, est parallèle à l'axe principal des x, le

coefficient u disparaît dans son équation. Par suite, puisque $u = 0$ et que $v^2 + w^2 = 1$ l'équation de la surface de polarisation d'un pareil plan prend la forme :

$$x^2 [(\eta^2 + \varpi^2) + w^2 (\zeta^2 + \nu^2 - \eta^2 - \varpi^2)]$$
$$+ y^2 [(\eta^2 + q^2) + w^2 (\zeta^2 + \mu^2 - \eta^2 - q^2)]$$
$$+ z^2 [(\eta^2 + \mu^2) + w^2 (\zeta^2 + r^2 - \eta^2 - \mu^2)] + 4 \mu^2 v w y z = 1.$$

Un axe de cette surface coïncide avec l'axe des x, comme on pouvait s'y attendre d'après ce qui précède, et sa moitié a pour longueur :

$$\sqrt{\frac{1}{(\eta^2 + \varpi^2) + w^2 (\zeta^2 + \nu^2 - \eta^2 - \varpi^2)}}$$

La valeur réciproque de cette expression donne la vitesse avec laquelle se propagent les vibrations parallèles à l'axe des x et dont le plan d'onde perpendiculaire à la section principale yz forme avec l'axe des y un angle dont le sinus est w. D'après l'expérience, cette vitesse doit conserver cette valeur quelle que soit l'inclinaison de cette onde par rapport aux axes des y et des z, quel que soit par conséquent le cosinus w, ce qui n'est possible que si, dans l'expression de cette vitesse, le coefficient de w^2 est égal à zéro. Ainsi, pour qu'il y ait accord entre la théorie et l'expérience, il faut que

$$\zeta^2 + \nu^2 - \eta^2 - \varpi^2 = 0.$$

Les conclusions précédentes s'étendent aussi sans rien y ajouter, aux deux autres axes principaux ; et nous arrivons donc aux relations suivantes entre les constantes ξ, η, ζ etc. qui dépendent seulement de la nature du milieu anisotrope :

$$\zeta^2 + \nu^2 = \eta^2 + \varpi^2; \qquad \xi^2 + \varpi^2 = \zeta^2 + \mu^2; \qquad \xi^2 + \nu^2 = \eta^2 + \mu^2.$$

Par suite et à cause de la relation $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, on peut donner à l'équation du second ellipsoïde de polarisation de la page 191, la forme plus simple :

$$x^2 [u^2 (\xi^2 + p^2 - \eta^2 - \varpi^2) + \eta^2 + \varpi^2]$$
$$+ y^2 [v^2 (\eta^2 + q^2 - \xi^2 - \varpi^2) + \xi^2 + \varpi^2]$$
$$+ z^2 [w^2 (\zeta^2 + r^2 - \xi^2 - \nu^2) + \xi^2 + \nu^2]$$
$$+ 4 \mu^2 vw\, yz + 4 \nu^2 uw\, xz + 4 \varpi^2 vu\, xy = 1.$$

Et enfin en représentant pour abréger par A, B, C, a, b, c, α, β, γ des grandeurs constantes dépendant de la nature du milieu, on aura :

$$x^2 [Au^2 + a] + y^2 [Bv^2 + b] + z^2 [Cw^2 + c]$$
$$+ 2 \alpha\, v\, w\, yz + 2 \beta\, uw\, xz + 2 \gamma\, uv\, xy = 1.$$

Cette équation nous montre tout d'abord, qu'en général aucune des trois

directions de vibrations qui correspondent à un plan d'onde, ne tombe rigoureusement dans ce dernier. Si cela avait lieu au moins d'une manière approchée pour deux de ces directions, on pourrait aussi, approximativement, remplacer les deux axes de la surface de polarisation qui déterminent ces directions par les axes de la section diamétrale parallèle au plan d'onde, ce qui permettrait alors de mettre les lois de la propagation et de la polarisation sous une forme plus facile à saisir. Or nous pouvons l'admettre d'après l'expérience comme le montreront les considérations suivantes.

Soit PP′ (figure 111), une plaque taillée dans une direction quelconque dans un cristal anisotrope, par exemple, une topaze. Supposons qu'au plan P considéré comme plan d'onde, correspondent les directions de vibrations OX, OY, OZ faisant avec lui des angles aigus. Supposons que par la face P pénètre maintenant un mouvement vibratoire rectilignement polarisé venant du milieu isotrope qui enveloppe la plaque, et que, le plan d'onde étant parallèle à P, la direction des vibrations soit déterminée par une ligne droite OR tracée sur P, soit $R = r \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} vt$ l'équation de ces vibrations. Nous pouvons décomposer ce mouvement en trois mouvements partiels dont les plans d'onde seraient encore parallèles à P mais dont les vibrations seraient respectivement parallèles à OX, OY et OZ. Représentons par ξ, η et ζ les déplacements dans ces mouvements partiels, et soit en outre $P = 0$ l'équation du plan P par rapport au système de coordonnées OXYZ. Si la ligne droite OR fait avec les axes les angles α, β, γ, on aura pour les équations des mouvements partiels :


Fig. 111.



$$\xi = r \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - P), \qquad \eta = r \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - P),$$

$$\zeta = r \text{ Cos. } \gamma \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}(vt - P).$$

Ces composantes se propagent évidemment dans l'intérieur du cristal sans que le plan d'onde et la durée des vibrations changent. Mais au passage dans le nouveau milieu, les amplitudes et les phases ainsi que les longueurs d'ondes et par conséquent les vitesses éprouveront des modifications et des modifications différentes suivant les différents mouvements. Après l'entrée dans le cristal on mettra à la place de r, λ et v, respectivement $\mu_1 r$, λ_1, v_1, $\mu_2 r$, λ_2, v_2, etc., et on aura une diminution ou une augmentation A_1.... de

phase. Le mouvement dans l'intérieur du cristal sera donc représenté par $\xi = \mu_1\, r \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda_1}(v_1\, t - P + A_1)$ etc. Lorsque les ondes sortant par la face P_1 pénètreront de nouveau dans le milieu ambiant, les amplitudes et les phases changeront pour la seconde fois et λ_1, v_1, etc., reprendront leurs valeurs primitives λ et v. Soit alors D l'épaisseur de la plaque, les composantes en repassant dans le milieu isotrope deviendront :

$$\xi = \mu_1\, \mu_1'\, r \text{ Cos. } \alpha \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}\left[vt - P - \left(\frac{v}{v_1} - 1\right)D + A_1 + A_1'\right],$$

$$\eta = \mu_2\, \mu_2'\, r \text{ Cos. } \beta \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}\left[vt - P - \left(\frac{v}{v_2} - 1\right)D + A_2 + A_2'\right],$$

$$\zeta = \mu_3\, \mu_3'\, r \text{ Cos. } \gamma \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda}\left[vt - P - \left(\frac{v}{v_3} - 1\right)D + A_3 + A_3'\right].$$

Sans qu'il soit nécessaire de chercher quel serait le mouvement résultant, nous voyons immédiatement que l'espèce de polarisation de la lumière qui quitte le cristal dépend essentiellement de l'épaisseur de ce dernier. Or ce résultat est en opposition avec ce fait que, si la direction des vibrations d'un rayon polarisé rencontrant le cristal perpendiculairement coïncide avec l'une ou l'autre de deux directions perpendiculaires déterminées, placées dans le plan P, le rayon après avoir traversé le cristal n'éprouve pas de changements sensibles ni dans l'espèce, ni dans la direction de sa polarisation, quelle que soit d'ailleurs l'épaisseur de la plaque. Cela ne peut s'accorder avec les résultats précédents qu'à la seule et unique condition que deux des directions OX, etc., seront très-voisines de la face P. Celles-ci sont donc ces directions fixes suivant lesquelles la lumière incidente doit être polarisée, afin que, quelle que soit l'épaisseur de la plaque et après avoir quitté ce cristal, cette lumière reste polarisée en ligne droite et dans la direction primitive. Car supposons, par exemple, que les axes OX et OY soient sur les faces P, et que sur l'un d'entre eux OX, se trouve la ligne OR, alors, puisque $\beta = \gamma = 90°$, les composantes η et ζ disparaissent et le plan de polarisation de la composante restante ξ se confond avec celui de la lumière incidente.

D'après cela nous ne commettrons donc qu'une erreur inappréciable, lorsqu'à la place de deux axes de la surface de polarisation, nous ferons entrer les deux axes de la section diamétrale parallèle au plan d'onde : ces axes déterminent alors la direction et la vitesse de propagation des vibrations transversales, les seules qui tombent sous le sens de la vue. Cette méthode est

tout à fait exacte dans le cas où le plan d'onde est parallèle à une section principale, car alors les axes de la section diamétrale coïncident avec ceux de l'ellipsoïde de polarisation. Nous obtenons encore un résultat exact quand le plan d'onde est parallèle à un axe principal. En effet un axe de l'ellipsoïde coïncide avec cet axe principal, auquel est parallèle le plan d'onde ; alors aussi nécessairement un axe de la section diamétrale coïncide avec cet axe de l'ellipsoïde. Ces rapports nous conduisent à identifier approximativement les sections diamétrales en question de la surface de polarisation avec celles qui lui seraient parallèles dans un ellipsoïde nouveau dont les axes se confondraient avec les axes principaux optiques, et seraient en longueur égaux aux axes de cette surface, quand l'un de ceux-ci coïncide avec un de ceux-là. L'équation de cet ellipsoïde est :

$$\text{E}\ldots\ldots\quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,$$

où a, b, c, représentent les constantes qui entrent dans l'équation de la surface de polarisation.

Eliminons, entre l'équation

$$\text{u}x + \text{v}y + \text{w}z = 0,$$

d'un plan d'onde d'une direction quelconque et l'équation de la surface de polarisation de la page 195, la variable x ; nous obtenons pour la projection sur le plan des yz de l'intersection S de ces deux surfaces l'équation :

$$\begin{aligned} &y^2\,[(\text{A} + \text{B} - 2\gamma)\,\text{u}^2\text{v}^2 + a\text{v}^2 + b\text{u}^2] \\ &+ z^2\,[(\text{A} + \text{C} - 2\beta)\,\text{u}^2\text{w}^2 + a\text{w}^2 + c\text{u}^2] \\ &+ 2yz\,[(\text{A} + \alpha - \beta - \gamma)\,\text{u}^2 + a]\,\text{vw} = 1. \end{aligned}$$

D'autre part on a pour la même projection de la section S' du plan d'onde et de l'ellipsoïde E :

$$y^2\,(a\text{v}^2 + b\text{u}^2) + z^2\,(a\text{w}^2 + c\text{u}^2) + 2yz\,a\,\text{vw} = 1.$$

Les deux projections et par suite aussi les deux ellipses S et S' se confondent évidemment, dès que le plan d'onde coïncide avec la section principale yz, car on a dans ce cas $\text{v} = \text{w} = 0$ et $\text{u} = 1$, et les deux équations trouvées deviennent

$$by^2 + cz^2 = 1.$$

La même chose a lieu pour l'autre section principale. Partant de là nous admettrons en général que les sections S et S' pour toute position du plan d'onde ne diffèrent nullement l'une de l'autre ou seulement d'une quantité inappréciable, et cela semble en effet être ce qui a lieu dans la nature. Mais si S et S' doivent coïncider, leurs projections doivent aussi le faire, et en exprimant cette condition, ce qui se fait en identifiant dans les équations de ces dernières les coefficients homologues, nous obtenons les équations suivantes :

$$A + B - 2\gamma = A + C - 2\beta = A + \alpha - \beta - \gamma = 0 \quad \text{ou :}$$
$$A + B - 2\gamma = A + C - 2\beta = B + C - 2\alpha = 0 \quad \text{ou aussi :}$$
$$p^2 + q^2 - 6\varpi^2 = p^2 + r^2 - 6\nu^2 = q^2 + 6\mu^2 = 0.$$

Si dès lors ces équations sont satisfaites, comme celles de la page 195, par les constantes du milieu (et nous l'admettons pour pouvoir expliquer ses propriétés optiques (1)), nous pouvons pour obtenir le mouvement correspondant à une onde donnée, faire tout à fait abstraction de l'ellipsoïde de polarisation dont les relations avec cette onde ne sont pas très-simples ; à la place de cette surface nous nous servirons alors de l'ellipsoïde E dont la position et les dimensions sont indépendantes du plan d'onde. Les axes de cette surface, dont la position absolue est indifférente, sont parallèles aux axes principaux optiques du milieu, de telle sorte qu'aussi les sections principales du cristal et de l'ellipsoïde coïncident : leur longueur se déduit facilement de la considération de la surface elle-même.

Résumons maintenant les lois qui jusqu'à présent se sont offertes à nous pour le mouvement de la lumière dans un milieu anisotrope.

Dans une direction donnée, il ne peut en général se propager dans un milieu cristallisé que deux sortes d'ondes planes. Leurs vibrations sont rectilignes et polarisées à angle droit : elles sont dirigées dans le plan même des ondes, et sont par conséquent perpendiculaires à la direction de la propagation. La direction des deux groupes de vibrations s'obtient dans chaque cas, en construisant l'ellipsoïde E *tel qu'il correspond à chaque cristal et à la couleur de la lumière, et en menant par son centre un plan perpendiculaire à la direction donnée de la propagation. Les directions des axes de la section diamétrale déterminée par ce plan dans l'ellipsoïde, sont parallèles aux directions des vibrations, et les valeurs réciproques des demi-axes donnent la vitesse avec laquelle se propagent les vibrations correspondantes.*

Un des deux groupes des vibrations qui correspondent à une direction de

(1) Nous ne devons pas manquer de faire remarquer que l'on arrive à d'autres équations de condition, si l'on part de l'hypothèse que les vibrations d'un rayon polarisé en ligne droite sont dans le plan de polarisation; voyez : *On the calcules of Fresnel's surface of wave.* Philos. Magazine, oct. 1851. La question de la direction des vibrations, comme nous l'avons déjà remarqué page 50, n'est pas résolue. Dans ces derniers temps Haidinger a cherché à le faire ; ses preuves sont illusoires. Voyez sur la direction des vibrations de l'éther dans un rayon polarisé en ligne droite, *Ann. de Poggendorf,* LXXXVI. On trouve d'autres recherches de M. Babinet et de M. Cauchy dans le *Répertoire d'optique* de M. Moigno, page 1366, tome IV.

propagation perpendiculaire à un axe principal optique, est déterminé d'après cela en grandeur et en position par l'axe même de l'ellipsoïde E coïncidant avec cet axe principal. Les demi-axes de cette surface doivent donc être égalés aux valeurs réciproques des vitesses avec lesquelles se propagent dans le cristal les rayons dont la direction et le plan de polarisation sont perpendiculaires à ces demi-axes là. Dès lors dans la topaze et pour la lumière du spectre solaire correspondant à la raie F, les coefficients a, b, c de l'ellipsoïde E se déterminent comme il suit, d'après ce qui a été dit page 194 :

$$a = \frac{V^2}{1{,}61914^2} \qquad b = \frac{V^2}{1{,}62652^2} \qquad c = \frac{V^2}{1{,}61701^2},$$

V représentant la vitesse de la lumière dans l'air.

La question que nous indiquions au commencement comme le sujet de ce chapitre est maintenant à moitié résolue. En partant de prémices simples, avec le secours du calcul, et en ne nous appuyant sur les données de l'expérience que là où, par la nature de la question, la théorie nous laissait en suspens, nous sommes arrivés aux lois générales de la propagation de la lumière dans un milieu homogène. Elles attendent maintenant pour être tout à fait établies la confirmation expérimentale. Pour le faire, il nous faut une notion exacte des différentes formes cristallines : c'est pourquoi, avec la simplicité et la briéveté que permet l'emploi des expressions analytiques, il nous faut jeter, pour atteindre notre but, un coup d'œil aussi rapide que possible sur la cristallographie.

CHAPITRE IV.

Systèmes cristallins.

1) Parmi les cristaux, les plus simples sont ceux dont l'ensemble des faces possibles forme un octaèdre régulier. Prenons pour axes coordonnés les trois diagonales rectangulaires de ce dernier, les faces de l'octaèdre sont également inclinées sur les plans coordonnés. Les coefficients de leur équation sont égaux à l'unité, et le rapport fondamental devient 1 : 1 : 1. Le symbole pour les faces de l'octaèdre régulier est donc (1, 1, 1), figure 112.

A côté de l'octaèdre régulier se placent d'autres formes octaédriques dont le symbole général est ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$). Nous partagerons ces polyèdres en deux classes, l'une comprenant ceux pour lesquels deux des grandeurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont égales, l'autre ceux pour lesquels cela n'a pas lieu. Dans le symbole des premiers il n'y aura que deux valeurs absolues des coefficients, et suivant qu'on les écrira à une place différente du symbole, on obtiendra trois plans différents, ou plutôt trois octaèdres différents (puisque toutes les faces pour lesquelles les coefficients $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ont la même valeur absolue, font partie de ce symbole).

Fig. 112.



Mais maintenant, comme dans le cas dont il s'agit, les trois axes coordonnés ou axes cristallographiques sont disposés symétriquement dans le cristal ou, comme on dit, ont la même valeur, il doit en être de même pour les trois octaèdres, et dès lors leurs faces peuvent se montrer simultanément et présenter un même degré de développement; c'est pour cela que nous regardons l'ensemble de trois pareils octaèdres comme *une* forme cristalline. Les plus remarquables des cristaux ainsi composés sont le *leucitoèdre* et le *leucitoïde*. Le premier (figure 113), a pour symbole ($\frac{1}{2}$. 1. $\frac{1}{2}$), et le second (figure 114), est représenté par ($\frac{1}{3}$. 1. $\frac{1}{3}$). Les figures 115 et 116 montrent deux faces des octaèdres dont ces polyèdres se composent.

Fig. 113.

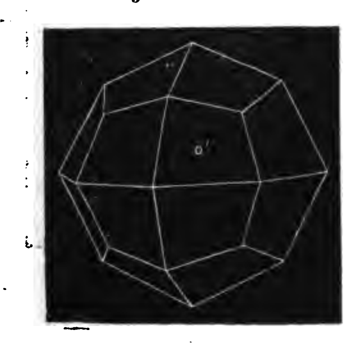


Fig. 114.



Si dans le symbole d'une face à coefficients inégaux on porte les valeurs absolues de ces derniers aux différentes places, on obtient évidemment six

plans de même valeur. A chaque plan correspond un octaèdre et tous ceux-ci ayant également la même valeur peuvent se réunir, pour former par leur

Fig. 115.

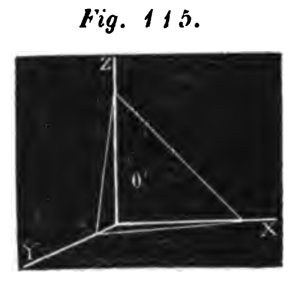
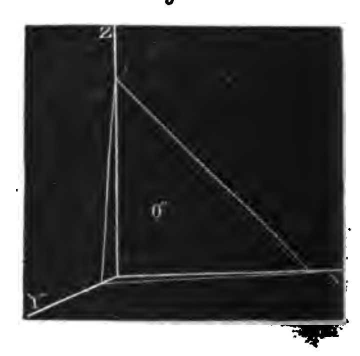


Fig. 116.



ensemble, un cristal à 48 faces. Prenons, par exemple, le symbole $(\frac{2}{3}.\ 1.\ \frac{1}{3})$. Nous aurons par les permutations des coefficients les cinq nouveaux symboles suivants :

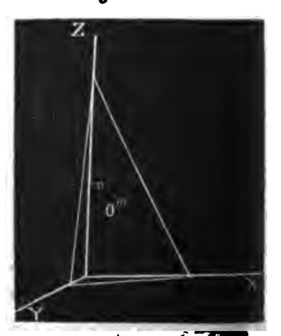
$$(\tfrac{1}{3}.\ 1.\ \tfrac{2}{3})\ (1,\ \tfrac{2}{3}.\ \tfrac{1}{3})\ (1.\ \tfrac{1}{3}.\ \tfrac{2}{3})\ (\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3}.\ 1)\ (\tfrac{2}{3}.\ \tfrac{1}{3}.\ 1),$$

et les octaèdres représentés par ces six symboles limitent le cristal appelé *adamantoïde* (fig. 117) : une face de son octaèdre élémentaire $(\frac{2}{3}.\ 1.\ \frac{1}{3})$ est représentée (fig. 118).

Fig. 117.



Fig. 118.



Le symbole général d'une forme prismatique est

$$(o.\ \mathfrak{b}.\ \mathfrak{c}).\qquad (\mathfrak{a}.\ o.\ \mathfrak{c})\qquad (\mathfrak{a}.\ \mathfrak{b}.\ o)$$

suivant que l'axe du prisme coïncide avec l'axe des x, des y ou des z. Comme les octaèdres, nous partagerons les prismes 1) en prismes pour lesquels les

coefficients différents de zéro sont égaux, 2) en prismes pour lesquels ce n'est pas le cas. Pour les prismes de la première espèce il n'y en a évidemment que trois, et leurs symboles peuvent se rapporter à la forme :

$$(0, 1, 1) \quad (1, 0, 1) \quad (1, 1, 0).$$

Les faces de ces prismes sont de même valeur et seront considérées comme les faces d'un polyèdre ; c'est le *granatoëdre*. La figure 119 le représente et la figure 120 est un de ses prismes élémentaires.

Fig. 119.

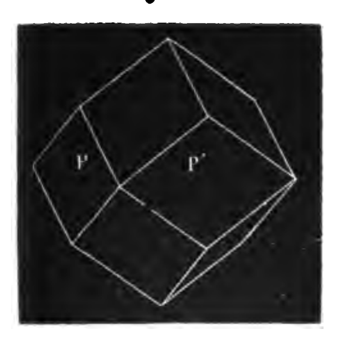
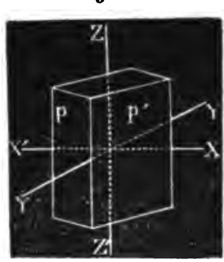


Fig. 120.



De même pour les prismes à coefficients inégaux, six d'égale valeur se groupent en une seule forme cristalline. La forme la plus remarquable de cette espèce est l'*hexakistetraëdre* (figure 121) limitée par les prismes :

$$(0, 1, \tfrac{1}{2}), (0, \tfrac{1}{2}, 1), (1, 0, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 0, 1), (1, \tfrac{1}{2}, 0), (\tfrac{1}{2}, 1, 0)$$

La figure 122 représente une face du prisme $(0, 1, \tfrac{1}{2})$.

Fig. 121.

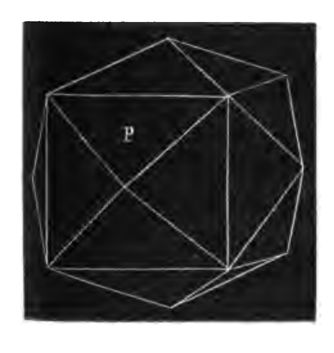
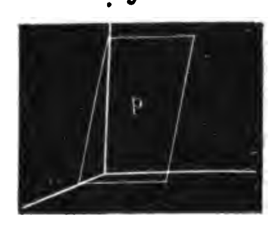


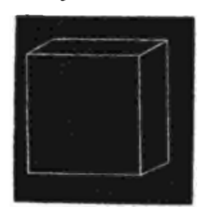
Fig. 122.



Les trois paires de faces possibles (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) perpendi-

culaires sur les axes cristallins et de même importance, limitent le *cube* figure 123. De lui peuvent se dériver toutes les formes que nous venons d'étudier par des troncatures réglées sur les angles ou les arêtes, c'est pourquoi on appelle aussi ces formes, *formes tesserales* ou *cubiques* et leur ensemble, *système tesseral* ou *cubique*.

Fig. 123.



2) Le système cristallin *tétragonal* comprend toutes les formes à axes rectangulaires dans le rapport fondamental desquelles deux termes sont égaux entre eux. Soit ce rapport Cos. α : Cos. α : Cos. γ; alors l'axe des z se distingue des deux autres qui ont même valeur : cet axe des z, d'après cela, se nomme aussi *axe principal*, et les autres *axes secondaires*. Le rapport des axes est le plus simple dans la forme dont le symbole est (1, 1, 1) c'est un *octaëdre tétragonal* dont les diagonales coïncidant avec l'axe des x et celui des y sont égales, tandis que la diagonale verticale est plus grande ou plus petite ; et alors l'octaëdre est aigu ou obtus (fig. 124 et 125).

Fig. 124.



Fig. 125.

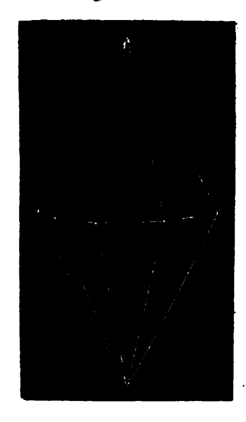


Les octaèdres possibles du système tétragonal, nous les partageons en deux classes, savoir 1) ceux dont le symbole offre les coefficients égaux aux deux premières places, et 2) ceux dans lesquels ce n'est pas le cas. Les premiers octaèdres sont évidemment des octaèdres exclusivement tétragonaux : leurs diagonales horizontales sont toujours égales ; mais la diagonale verticale, suivant le rapport entre un des deux premiers coefficients du symbole et le dernier, est tantôt plus grande, tantôt plus petite que les premières.

Le symbole pour une forme de la seconde espèce est ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) et il détermine un octaëdre irrégulier. Si nous alternons les deux premiers coefficients nous aurons ($\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$) et ce symbole appartient à un octaëdre irrégulier, iden-

tique au premier, mais tourné par rapport à celui-ci de 90° autour de l'axe principal. Maintenant les deux axes secondaires étant de même valeur, ces deux octaëdres le sont aussi, et peuvent se produire simultanément; leurs faces en général prennent le même développement et sont regardées comme les faces d'une seule et même forme cristalline, que l'on nomme une *double pyramide symétrique à huit fares :* elle est représentée figure 126.

Fig. 126.



Parmi les prismes du cristal tétragonal, ceux à axes horizontaux se groupent en couples de même valeur. En effet, il est évident que les deux prismes $(o, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ et $(\mathfrak{b}, o, \mathfrak{c})$ ne se distinguent pas l'un de l'autre; leurs faces peuvent dès lors s'unir pour former *une* forme cristalline : mais celle-ci n'est autre chose qu'un octaèdre tétragonal; dont l'axe principale est sur l'axe des z, dont les axes secondaires sont inclinées de 45° sur l'axe des x et sur celui des y, de sorte que les arêtes horizontales sont perpendiculaires à ces derniers axes (figure 127).

Les prismes dont l'axe se confond avec l'axe principal, peuvent se partager suivant que : 1° les coefficients du symbole différents de zéro sont égaux entre eux ou que, 2° cela n'a pas lieu. Le prisme du premier cas, représenté par le symbole (1, 1, 0) a pour section un carré dont les diagonales sont parallèles aux axes secondaires (figure 128).

Fig. 127.

Les autres prismes $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, o)$ se groupent par couples de même valeur, par exemple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, o)$ et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, o)$ dont la réunion forme un *prisme à huit pans irrégulier ou symétrique* (figure 129).

Parmi les paires de faces des cristaux tétragonaux, celles qui sont perpendiculaires aux axes secondaires (0, 1, 1) et (1, 0, 1) sont dans les mêmes relations par rapport au cristal; elles se combinent ensemble en un prisme à base carrée dont l'axe est l'axe principal, et dont les pans sont perpendiculaires aux axes secondaires (figure 130).

La troisième paire de faces (1, 1, 0) perpendiculaire à l'axe principal,

est unique. On peut la regarder comme la base des prismes verticaux.

Fig. 128.



Fig. 129.



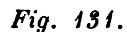
Fig. 130.

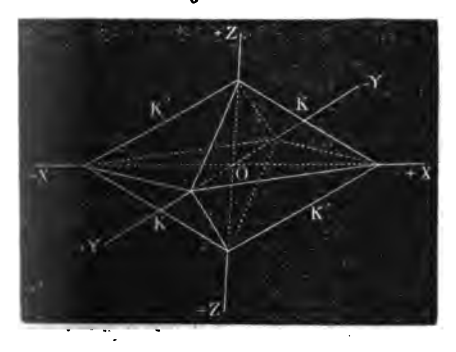
3) Les cristaux *isocliniques* ou *rhombiques* ont trois axes perpendiculaires entre eux et la forme la plus générale du rapport fondamental; les trois termes y sont tout à fait inégaux. Puisque d'après cela chaque axe du cristal se présente indépendant des autres, alors aussi chaque octaëdre, prisme, ou paire de faces possible est une forme cristalline indépendante. Nous l'avons vu page 185 dans l'exemple de la topaze.

Les cristaux cubiques, tétragonaux et isocliniques sont les seuls qu'on puisse déduire d'un système d'axes rectangulaires. Les cristaux avec trois axes inclinés et inégaux, auxquels nous passons maintenant, se subdivisent en formes *monocliniques* ou *tricliniques* suivant qu'un des axes est ou n'est pas perpendiculaire sur les deux autres. On ne considère pas le troisième cas imaginable où seulement deux axes seraient perpendiculaires entre eux, parce qu'on n'est pas certain de l'avoir rencontré dans la nature.

4) Dans les formes *monocliniques* nous choisissons comme *axe principal* celui qui est perpendiculaire sur les deux autres. Cet axe devra être nécessairement un axe de symétrie et le plan des deux autres un plan de symétrie pour toutes les formes. Parmi celles-ci nous considèrerons de nouveau l'octaëdre. La figure 131 en représente un dont l'axe principal est dirigé suivant l'axe des y : soit son symbole $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$. Les faces de cet octaëdre ne sont évidemment pas dans le même rapport relativement au cristal. La position de la face qui, par exemple, est dans l'octant $(+ X + Y + Z)$ est toute autre que celle de la face de l'octant $(- X + Y + Z)$. Tandis que ces mêmes faces, si les axes étaient perpendiculaires entre eux, devraient être

regardées comme de même valeur. Mais la première est dans la même relation par rapport au système d'axes, non-seulement avec sa parallèle de l'octant (— X — Y — Z), mais avec la face de l'octant (— X + Y — Z) et avec sa parallèle de l'octant (+ X — Y + Z). De même à la face de l'octant (— X + Y + Z) s'adjoignent comme étant de même valeur celles des octants (— X — Y + Z), (+ X — Y — Z), (+ X + Y — Z). Ainsi les huit faces comprises dans le symbole (a, b, c) se partagent en deux groupes de quatre faces de même valeur, et déjà un pareil groupe doit être regardé comme limitant par lui-même une forme cristalline. Mais un de ces groupes, comprenant les faces (+ a + b + c), (+ a — b + c) (— a — b — c) et (— a + b — c) forme un prisme rhombique, dont l'axe placé dans le plan de symétrie XOZ, est parallèle à l'arête K, et dont une diagonale tombe sur l'axe des y. Le second groupe des faces (— a + b + c) (— a — b + c) (+ a — b — c) (+ a + b — c) limite également un prisme rhombique dont une section principale est dans le plan de symétrie : l'axe de ce prisme est parallèle à l'arête K'. Pour distinguer ces deux prismes par le symbole, nous devons y introduire les signes et nous obtenons pour une face du premier prisme, et aussi pour lui-même, le symbole (+ a + b + c) ou simplement (a, b, c) et pour le second prisme (+ a + b — c) ou (a, b, — c).


Fig. 131.

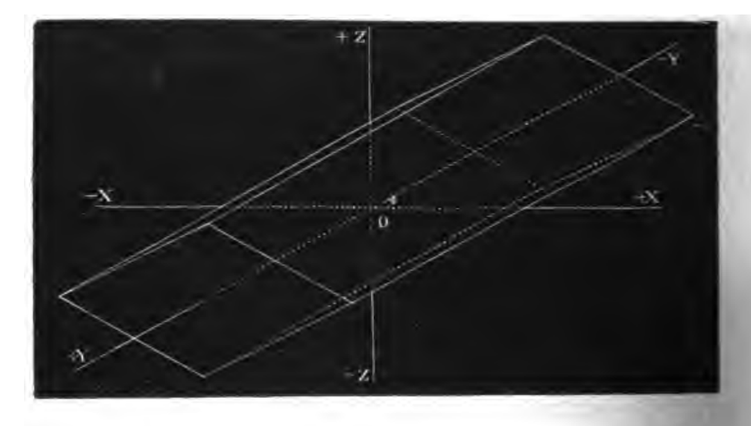


Parmi les prismes divers, en lesquels d'après ce qui précède se divisent les octaëdres monocliniques, aucun au point de vue morphologique ne se distingue naturellement de l'autre, et il en résulte que le choix des axes cristallins n'est limité dans le plan de symétrie qu'en tant qu'il faut prendre pour eux les axes de deux des prismes en question, mais que le choix de ces prismes est lui-même tout à fait arbitraire.

Aux formes possibles du système monoclinique, appartiennent en outre des prismes dont l'axe est perpendiculaire au plan de symétrie. Un d'entre eux sera représenté par le symbole (a, 0, c) il est dessiné figure 132. Parmi ses faces il y en a évidemment une paire (+ a, 0 + c) et (— a, 0 — c) qui n'est pas dans le même rapport avec un système d'axes quelconques que

l'autre paire $(-a, 0, +c)$ et $(+a, 0, -c)$ et dès lors ces prismes doivent être partagés en paires de faces parallèles, de même valeur, qui se distinguent l'une de l'autre par l'introduction des signes.

Fig. 132.



Aux paires de faces dont nous venons de parler appartiennent aussi celles qui, par le choix d'un système d'axes déterminés seront représentées par le symbole (1, 0, 0) et (0, 0, 1) ; on n'a pas dès lors à les considérer en particulier et il ne reste plus à mentionner que la paire de faces (1, 0, 1). Elle est parallèle au plan de symétrie et existe seule.

D'après ce qui précède, les limites des formes cristallines, ayant une existence propre dans le système monoclinique, consistent 1° en prismes rhombiques dont une section principale coïncide avec le plan de symétrie ; 2° en paires de faces parallèles à l'axe de symétrie ; 3° en une paire de faces perpendiculaires à cet axe.

5) Si, comme c'est le cas dans le système *triclinique*, les trois axes cristallins sont inclinés l'un sur l'autre, et ont une importance différente par rapport à la surface limitante, alors il n'y a plus que des paires de faces uniques qui puissent être prises pour limites cristallines propres. En effet, on se convainc facilement que, parmi les faces d'un octaëdre à diagonales tricliniques, on ne peut regarder comme de même valeur que celles qui sont dans les octants diamétralement opposés et qui sont parallèles. A la place de l'octaëdre on a dès lors l'ensemble de quatre paires différentes entre elles de faces de même valeur. De la même manière les prismes se partagent aussi en paires de faces.

6) Ayant trois axes de même valeur et le rapport fondamental le plus

simple, les cristaux *hexagonaux* se rapprochent par là des cristaux cubiques, de même que, d'autre part, ils se rapprochent aussi du système tétragonal, en ce que dans ces cristaux héxagonaux une direction semblablement placée par rapport aux axes propres peut s'étendre et prendre le caractère d'un axe principal : et nous donnerons ce nom à la direction qui forme des angles égaux avec les axes cristallins.

Parmi les angles trièdres que forment entre eux les trois axes également inclinés $+X - X, +Y - Y, +Z - Z$ (figure 133), il y en a deux, savoir ceux limités par les arêtes $O + X$, $O + Y$, $O + Z$ et $O - X$, $O - Y$, $O - Z$, qui se distinguent par ce que les angles dièdres y sont égaux. Il en résulte donc que les faces qui seront représentées par l'équation :

$$\pm ax \pm by \pm cz = 0.$$

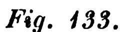


Fig. 133.



ou par le symbole (a, b, c), ne doivent pas être regardées comme de même valeur, mais auront, suivant les signes des coefficients, des valeurs toutes différentes. En effet déplaçons une de ces faces hors de l'origine, alors suivant ses coefficients elle sera dans l'un ou l'autre octant, c'est-à-dire qu'elle coupera l'un ou l'autre ensemble des trois demi-axes formant un octant. Pour chercher les faces de même valeur, et disposer les surfaces limites particulières, il faut donc avoir égard aux signes des coefficients, ce qui n'était pas nécessaire dans les cristaux à axes rectangulaires.

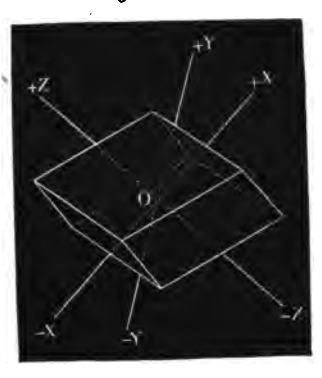
Considérons d'abord les faces dont les coefficients ont le même signe, et qui par suite peuvent se représenter par des coefficients positifs. Elles tombent toutes dans les deux octants représentés plus haut, de telle manière que chaque face d'un octant a sa parallèle dans l'autre. Nous les partagerons en 1° faces ayant trois coefficients différents; 2° faces ayant deux coefficients égaux; 3° la paire de faces dont tous les coefficients sont égaux. La dernière (1, 1, 1), est également inclinée sur les sections principales, et est par suite perpendiculaire à l'axe principal.

Parmi les faces à *deux* coefficients *égaux*, trois ayant la même valeur se groupent en une seule forme cristalline propre, ainsi, par exemple, la

face (1, 2, 2), est de même valeur que les faces (2, 1, 2) et (2, 2, 1). Un pareil groupe de faces limite un *rhomboèdre* dont la diagonale principale (la ligne qui joint les sommets des angles trièdres à faces égales ou les sommets), tombe sur l'axe principal. Si les deux coefficients d'une face du rhomboèdre sont plus grands que le troisième, les arêtes du sommet du rhomboèdre rencontrent les axes du cristal (figure 134).

A côté d'un rhomboèdre dont les arêtes au sommet sont ainsi disposées, s'en place un autre pour lequel les coefficients égaux seraient plus petits que le troisième; il est tourné de 60° par rapport au premier, de telle manière que ses arêtes au sommet rencontrent les bissectrices des angles de deux axes cristallins (fig. 135). Au passage de l'un de ces deux groupes à l'autre se trouve la paire de faces (1, 1, 1). L'autre limite du premier groupe est un rhomboèdre dont les faces sont respectivement parallèles à un axe du cristal, tandis que la limite du second groupe est un rhomboèdre dont les faces sont parallèles aux plans des axes du cristal.

Fig. 134.



Les faces à coefficients *inégaux* se groupent par six d'égale valeur. Un pareil groupe est formé, par exemple, de (1, 2, 3), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (3, 1, 2), il limite un *scalénoèdre* (figure 136). Aux faces du scalénoèdre appartiennent aussi celles qui ont pour symbole (a, b, 0), (a, 0, b), (0, a, b), (b, a, 0), (b, 0, a), (0, b, a); elles sont parallèles aux axes du cristal.

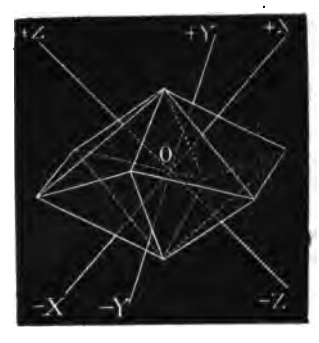
Fig. 135.



Parmi les six octants, encore à considérer, qui sont dans un même rapport envers le cristal, on ne doit pas négliger la différence entre deux arêtes auxquelles correspondent des angles dièdres égaux et la troisième dont l'angle est le supplément des premiers. Par exemple dans l'octant (— X, — Y, + Z), les arêtes O — X et O — Y, sont identiques mais diffèrent de l'arête O + Z. Dès lors nous distinguerons ici : 1° les faces dans lesquelles les coefficients correspondants aux arêtes égales sont

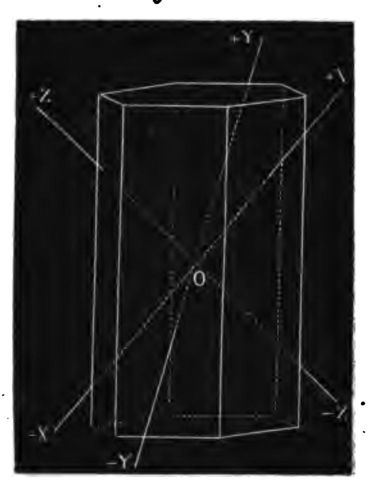
égaux; 2° et les faces pour lesquelles cela n'a pas lieu. Parmi les faces de la première espèce, comme elles correspondent aux valeurs absolues des coefficients, chaque octant n'en renferme qu'une seule. Le symbole d'une pareille face est par exemple (— 2, — 2, + 1). A celle-ci s'adjoignent comme de même valeur dans les autres octants (— 2, + 1, — 2), (+ 1, — 2, — 2), (+ 2, + 2, — 1), (+ 2 — 1 + 2), (— 1, + 2, + 2).

Fig. 136.



Six pareilles faces limitent un *rhomboèdre*. Les arêtes du sommet de ce dernier rencontrent les axes du cristal si la valeur absolue des coefficients égaux est la plus grande ; dans le cas contraire les arêtes du sommet coupent les bissectrices des angles des axes. Au passage de ces deux groupes de rhomboèdre, on a la forme (— 1, — 1, + 2), c'est le *prisme hexagonal* régulier, ce dont on peut s'assurer de la manière suivante. L'équation d'une face de la forme en question, en la supposant menée par l'origine, sera :

Fig. 137.



$$-x - y + 2z = 0.$$

Mais l'axe principal est représenté par les équations :

$$x = y = z,$$

puisqu'il fait des angles égaux avec les plans coordonnés. Les coordonnées d'un point de l'axe principal satisfont donc évidemment la première équation. La face (— 1, — 1, + 2) est donc parallèle à l'axe principal. La même chose a lieu pour les cinq autres faces de même valeur :

(— 1, 2, — 1), (2, — 1, — 1), (1, 1, — 2), (1, — 2, 1), (— 2, 1, 1).

Les six faces sont parallèles deux à deux [(— 1, — 1, 2) et (1, 1, — 2) etc.], et il est évident que ces paires de faces forment entre elles des angles égaux. Portons alors les faces à la même distance de l'origine et nous obtiendrons un prisme régulier à six pans, dont les arêtes sont parallèles à l'axe principal.

Parmi les faces à coefficients inégaux, si on les suppose transportées à l'origine, six de même valeur s'assemblent en une forme cristalline propre.

Fig. 138.



A la face (— 1, — 2, 4), par exemple, s'adjoignent (— 1, 4, — 2), (4, — 1, — 2), (— 2, — 1, 4), (4, — 2, — 1), (— 2, 4, — 1). En général ces faces limitent un *scalénoèdre* (figure 138). Celui-ci, dans le cas particulier où la somme algébrique de ses coefficients est nulle, se transforme en un *prisme irrégulier à douze faces* (figure 139) : car alors ses faces sont parallèles à l'axe principal. Et ce prisme irrégulier dégénère en un *prisme régulier à six faces* (figure 140), si dans son symbole un des coefficients affectés du même signe disparaît, puisqu'alors le symbole peut toujours être ramené à la forme (— 1, + 1, 0). Le prisme hexagonal que l'on obtient ainsi diffère de celui dont on a parlé plus haut, en ce que les trois plans de ses paires de faces passant par l'axe du cristal partagent par moitié les angles des plans coordonnés. Les deux prismes sont

Fig. 139.

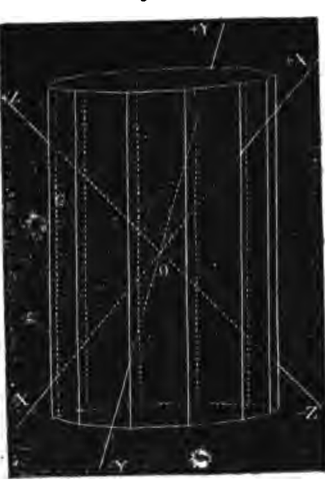
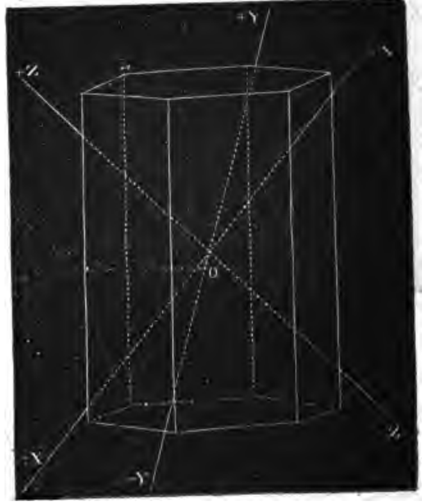


Fig. 140.



d'après cela tournés de 60° l'un par rapport à l'autre. Par rapport au rhomboèdre dont les arêtes au sommet seraient prises pour axes du cristal, le premier prisme coupe les angles du contour, le second les arêtes du contour.

ÉTUDE DES LOIS GÉNÉRALES

DU MOUVEMENT DE LA LUMIÈRE DANS CHAQUE SYSTÈME CRISTALLIN.

CHAPITRE V.

Système tesseral.

La propagation de la lumière dans les corps cristallisés étant en général différente suivant les différentes directions, il n'est pas nécessaire que la lumière qu'un point lumineux envoie dans de pareils corps s'y répande en ondes sphériques : *la surface de l'onde y possèdera plutôt une forme tout autre que celle d'une sphère.* De plus, les vibrations, en un point déterminé de cette surface, se propageront toujours parallèlement à une direction déterminée qui changera avec la position du point. Il est évident dès lors qu'il est indispensable de connaître la surface de l'onde, s'il s'agit dans un cas déterminé de raisonner sur la marche de la lumière dans le phénomène de la réfraction, et de vérifier si les prédictions de la théorie s'accordent avec les résultats de l'expérience. C'est donc pour cela et aussi parce que la forme et la position de la surface de l'onde nous feront connaître d'une manière complète la propagation de la lumière, que nous allons chercher cette surface dans les différents systèmes cristallins. Voici en quelques mots la marche générale que nous suivrons.

Par un point quelconque P du cristal, supposons menés tous les plans possibles. Imaginons que dans chacun de ceux-ci se produisent des vibrations de lumière ordinaire se faisant dans le plan même, et que l'amplitude de ces

vibrations conserve en tous les points une grandeur constante. De chacun de ces plans, d'après les lois générales de la propagation, partent alors d'un côté et de l'autre deux ondes planes lumineuses qui lui sont parallèles. Les vibrations de ces ondes sont dans ces ondes mêmes et de plus rectilignes. Les deux ondes du même côté ne se propagent pas avec la même vitesse et elles sont polarisées à angle droit. A chaque onde d'un côté correspond une onde de l'autre côté ayant la même vitesse et la même direction de vibrations; mais ces quatre ondes possèdent la même amplitude.

De l'ensemble de tous ces plans produisant de la lumière nous obtenons dès lors deux groupes d'ondes, qui égales en amplitudes, mais différentes en direction, en vitesse et en polarisation s'éloignent toujours de plus en plus du point P, sans pour cela subir de changement dans leurs attributs.

Supposons l'intensité primitive extrêmement faible, le mouvement de chaque onde en particulier échappe au sens de la vue; toutefois dans les points de la surface ou de l'ensemble des surfaces qui sera enveloppé par les ondes planes, il y aura un mouvement lumineux perceptible, résultant de l'interférence des ondes planes en nombre infini qui se coupent en un point de la surface enveloppée, si toutefois les plans placés à côté l'un de l'autre dans la position primitive possédaient le même état vibratoire. Admettons-le, il est évident alors que tout se passe comme si le point P était un point brillant. A partir de ce point, et avec des dimensions croissant uniformément, la surface enveloppée s'étend donc comme surface de l'onde. Les vibrations y sont rectilignes et en un point de la surface, leur direction coïncide avec celle qui appartient à l'onde plane tangente. On comprend facilement que cette manière d'envisager la marche du rayonnement divergent, conduit pour le décroissement de l'intensité à la loi que nous avons trouvée dans le chapitre IX de la première partie, en partant d'un autre point de vue.

Avec le temps, la surface de l'onde s'étend dans tous les sens, sans toutefois changer sa nature et sa position relative. Seulement ses dimensions augmentent suivant chaque direction des deux côtes également, mais inégalement en passant d'une direction à une autre. Sous le nom de *surface de l'onde* nous comprendrons celle qui correspond à l'unité de temps, c'est-à-dire, le lieu de tous les points de l'espace qui, après l'unité de temps, possèdent l'état vibratoire du centre rayonnant : dans le même milieu, elle est pour chaque point de même forme, de même grandeur et placée de la même manière par rapport à des directions déterminées. Mais d'une couleur à l'autre ces attributs pourront changer totalement ou en partie.

Appliquons ces raisonnements aux cristaux du système cubique. Dans

ceux-ci il y a trois axes orthogonaux de même valeur : les axes de l'ellipsoïde E (page 198) qui se rapporte à ces cristaux devront dès lors être égaux. En effet puisque les molécules de l'éther dans la direction des trois axes sont également distantes entre elles, comme les molécules du cristal lui-même, il faut poser :

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m f \frac{\Delta x^2}{\Delta r} = \tfrac{1}{2}\Sigma mf \frac{\Delta y^2}{\Delta r} = \tfrac{1}{2}\Sigma mf \frac{\Delta z^2}{\Delta r} \text{ ou } \xi^2 = \eta^2 = \zeta^2$$

et de même aussi :

$$\mu^2 = \nu^2 = \tilde{\omega}^2 \text{ et } p^2 = q^2 = r^2.$$

Mais par suite de cela on aura $a = b = c$ et l'ellipsoïde E devient une sphère. Menons un plan diamétral parallèle à une onde plane donnée, nous obtenons comme section, quelle que soit la position de ce plan, un cercle de rayon constant et comme axes de celui-ci nous pouvons considérer deux diamètres perpendiculaires entre eux. Suivant toutes les directions, pourront donc se propager des vibrations rectilignes, quel que soit leur plan de polarisation, par conséquent aussi des ondes de vibrations elliptiques, ou des ondes de lumière partiellement polarisée ou enfin de lumière naturelle, et elles se propageront avec une vitesse constante, sans subir de division ni de changement dans la polarisation. La surface de l'onde sera une sphère dont le rayon est égal à la vitesse de propagation de la lumière. D'après la théorie, les cristaux du système tesseral ne se distinguent donc pas, au point de vue optique des corps isotropes (1), et c'est en effet ce qu'on remarque dans le plus grand nombre des corps de cette classe qu'on a étudiés. Là où l'on a observé une différence, elle se trahit par sa nature même comme une anomalie, et on en trouve une explication suffisante en ce que le cristal ne présente plus d'équilibre cristallographique. Voyez pour ces cas exceptionnels : Moigno, *Répert. d'opt.*, I, page 349; *Optique* de Brewster § 125; *Optique* d'Herschell, 1133.

La loi de la dispersion des cristaux cubiques doit, comme on peut le voir

(1) Au moins c'est ce qui paraît résulter de l'équilibre cristallographique et ce qu'on peut admettre tant que, comme il arrive ici, nous nous contenterons d'une première, mais cependant assez grande approximation. Voyez les remarques de M. Bravais dans le mémoire : « *Description d'un nouveau polariscope et recherches sur les doubles réfractions peu énergiques.* » *Compt. rend.*, janvier 1851. Toutefois, il résulte des recherches de M. Vertheim, qu'en fait, l'éther lumineux aurait une autre constitution dans les cristaux cubiques que dans les milieux amorphes. Voyez *Comptes rendus*, n° 21, novembre 1851.

facilement par le chapitre II, s'accorder avec celle des corps isotropes. Nous allons le vérifier d'après les indices de réfraction du sel gemme que donne Baden-Powell dans la Ire partie, page 9, du mémoire cité. Ces indices sont :

Rayons.	B	C	D	E	F	G	H
Indices.	1,5403	1,5415	1,5448	1,5498	1,5541	1,5622	1,5691

Les différences de deux indices consécutifs sont les termes de la série suivante :

$\mu_h - \mu_g$	$\mu_g - \mu_f$	$\mu_f - \mu_e$	$\mu_e - \mu_d$	$\mu_d - \mu_c$	$\mu_c - \mu_b$
69	81	43	50	33	12

Les rapports de ces nombres peuvent se remplacer par ceux des suivants :

77	90	47	55	36	13

Et ces nombres coïncident presque complétement, au moins pour cinq d'entre eux, avec les résultats suivants obtenus par la formule approchée de M. Cauchy,

$\frac{1}{\Lambda_h^2} - \frac{1}{\Lambda_g^2}$	$\frac{1}{\Lambda_g^2} - \frac{1}{\Lambda_f^2}$	$\frac{1}{\Lambda_f^2} - \frac{1}{\Lambda_e^2}$	$\frac{1}{\Lambda_e^2} - \frac{1}{\Lambda_d^2}$	$\frac{1}{\Lambda_d^2} - \frac{1}{\Lambda_c^2}$	$\frac{1}{\Lambda_c^2} - \frac{1}{\Lambda_b^2}$
77	86	47	54	41	13

Outre les constantes optiques du sel gemme, nous ne possédons que les indices moyens de réfractions des substances cubiques, contenus dans la table suivante. Les observateurs sont désignés de la même manière que dans les tables de la première partie.

INDICES DE RÉFRACTION DES CRISTAUX CUBIQUES.

Substance		Observateur	Indice
Alun.		W.	1,457
» densité 1,714.		N.	1,458
»		Y.	1,4[illegible]8
» perpendiculairement à un axe de l'octaèdre	0	J.*	1,428
»	+	J.*	1,448
Acide arsenieux.	+	J.*	1,692
Blende.		Br.	2,260
»		J.	2,369
»	+	J.*	2,371
Boracite.		Br.	1,701
Diamant. Densité 3,4.		N.	2,439
»		Br.	2,470
» brun.		Br.	2,487
»		Roch.	2,755
»	+	J.*	2,434
Spath fluor.		W.	1,433
»		Br.	1,436
»		Br.	1,434
»	—	J.*	1,441
Grenat.		Br.	1,815
»	+	J.*	1,767
Camphre.		W.	1,487
»		Y.	1,496
»		C.	1,500
» Densité 0,996.		N.	1,500
Pierre de cannelle.		Br.	1,759
Leucite.		Br.	1,527
Phosphore.		Y.	2,125
»		Br.	2,224
»		Br.	2,260
Pyrope.		Br.	1,792
Sel ammoniac.		Br.	1,625
Azotate de plomb.		Br.	1,758
Spinelle.		W.	1,812
»		Br.	1,761
»		He.	1,756
Sel gemme. Densité 2,143.		N.	1,545
»		Br.	1,557

CHAPITRE VI.

Système tétragonal et système hexagonal.

PROPAGATION DE LA LUMIÈRE.

Nous avons fait la remarque que les formes tétragonales et hexagonales sont rapprochées les unes des autres par un caractère morphologique commun, qui est l'existence d'une direction principale. Cette direction qui, dans le système tétragonal, se confond avec l'axe principal cristallographique, dans le système hexagonal avec la ligne également inclinée sur les trois axes, se distingue parce qu'on peut mener par cette direction un certain nombre de plans qui partagent chaque forme cristalline en deux moitiés symétriques. Dans le système tétragonal il y a quatre de ces plans, deux passent par les deux axes secondaires ; les deux autres par les bissectrices des angles des axes secondaires. Les formes hexagonales peuvent être partagées en deux parties symétriques par trois plans, savoir ceux qu'on peut mener par l'axe principal et chaque axe cristallographique. Ces rapports déterminent déjà, sans aller plus loin, la forme et la position de l'ellipsoïde E, qui nous sert pour établir les lois de la lumière. Car pour cette surface aussi les plans en question doivent être nécessairement, dans l'un et dans l'autre système, des plans de symétrie d'égale importance. Et cela n'est évidemment possible qu'autant que la surface E devient un ellipsoïde de révolution dont l'axe de révolution est parallèle à l'axe principal cristallographique. Ainsi disparaîtrait entre les cristaux tétragonaux et hexagonaux toute différence au point de vue optique, pourvu qu'il soit permis d'étendre aussi à ces derniers les lois d'un éther constitué parallélépipédiquement : c'est ce qui paraît pouvoir être adopté d'après ce qui suit.

Par rapport à un système de coordonnées rectangulaires dont l'axe des z se confond avec l'axe principal d'un cristal tétragonal ou hexagonal, l'équation de l'ellipsoïde E prendra la forme :

$$o^2 (x^2 + y^2) + e^2 z^2 = 1,$$

o étant la valeur réciproque du rayon de l'équateur et e celle du demi-axe de rotation.

Pour trouver ce qui est relatif à une onde plane donnée P (figure 141), menons un plan diamétral qui lui soit parallèle. Celui-ci coupe en général l'ellipsoïde suivant une ellipse ss, dont un axe $\alpha\alpha$ se trouve dans l'équateur

et est égal à son diamètre $\frac{2}{o}$. Le second axe $\beta\beta$ de la section diamétrale est évidemment dans le plan méridien que l'on peut mener par l'axe principal,

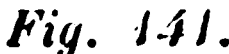
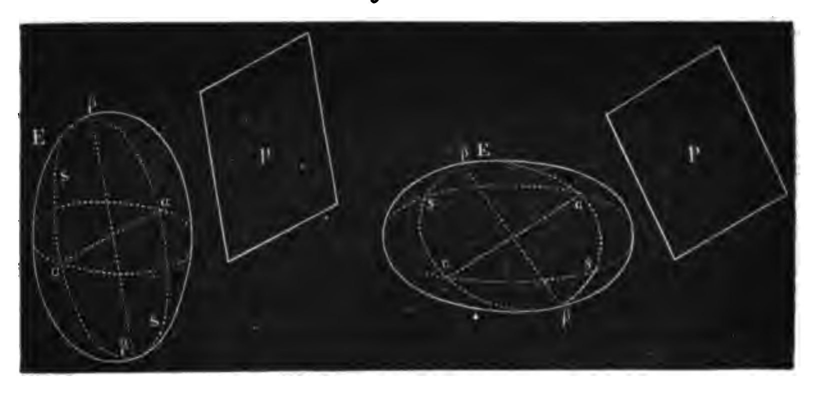


Fig. 141.



perpendiculairement à P, et est perpendiculaire à la normale à P. Représentons par φ l'angle que forme cette normale avec l'axe principal ; en vertu de ce que nous venons de trouver, le second axe de la section diamétrale n'est autre chose qu'un des diamètres égaux de l'ellipsoïde qui font avec l'axe de rotation l'angle 90° — φ. Si r représente la demi-longueur d'un pareil diamètre, on a entre les coordonnées de ses extrémités les relations :

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{Cos.}^2\varphi \quad \text{et} \quad z^2 = r^2 \text{Sin.}^2\varphi.$$

Ces valeurs, portées dans l'équation de la surface, donnent :

$$r^2 = \frac{1}{o^2 \text{Cos.}^2 \varphi + e^2 \text{Sin.}^2 \varphi}.$$

Ainsi, parallèlement à un plan donné, il se propage d'abord, dans un cristal à un axe principal, une onde plane dont les vibrations sont parallèles au plan mené par sa normale et l'axe principal. La vitesse de propagation de cette onde est, en représentant par φ l'angle de sa normale avec l'axe principal :

$$W = \frac{1}{r} = \sqrt{o^2 \text{Cos.}^2\varphi + e^2 \text{Sin.}^2 \varphi}.$$

Mais suivant la même direction se propage encore une onde dont les vibrations sont perpendiculaires à l'axe principal : sa vitesse est o.

Cette dernière vitesse est unique et ne dépend que de la nature du milieu et de la couleur : dès lors les vibrations perpendiculaires à l'axe principal se propagent également vite dans toutes les directions ; au contraire la vitesse de

vibrations dont la direction est dans un plan mené par l'axe principal, change avec la direction de l'onde plane à laquelle elles correspondent, et, sans parler de la nature du milieu et de la couleur, elle dépend seulement de l'inclinaison de cette onde sur l'axe principal, comme on le voit d'après son expression, qui, outre e et o, ne renferme que l'angle φ.

Si $\varphi = 90°$, c'est-à-dire, si le plan d'onde passe par l'axe principal, et que ses vibrations soient parallèles à cet axe, $\frac{1}{r}$ prend la valeur e. Suivant qu'on a $e > o$ ou $e < o$, cette valeur est un maximum ou un minimum parmi toutes les valeurs possibles; mais dans les deux cas la différence entre $\frac{1}{r}$ et o est la plus grande. Cette différence diminue quand φ devient plus petit, c'est-à-dire, quand la normale se rapproche de l'axe principal, et dans ce cas aussi les deux ondes qui correspondent à un plan se rapprochent l'une de l'autre.

Pour $\varphi = 0$, $\frac{1}{r}$ devient égal à o, et le plan mené par l'axe principal et la normale à l'onde plane deviennent indéterminés, à cause de la coïncidence de ces deux directions. Toutes les ondes se propagent donc dans la direction de l'axe principal avec une seule et même vitesse, de quelque manière qu'elles soient polarisées. C'est pour cela que cette direction est caractérisée par la dénomination d'*axe optique*.

La surface de l'onde des cristaux à un axe optique est nécessairement constituée de la même manière tout autour de cet axe, c'est-à-dire, c'est une surface de révolution dont l'axe coïncide avec l'axe optique. Nous pouvons même de suite, quant à sa forme, reconnaître qu'elle est formée de deux parties dont l'une enveloppe complétement l'autre, la touche tout au plus, mais ne la coupe jamais, et que l'une de ces parties est une sphère. Car les ondes planes à vitesse constante o enveloppent évidemment une sphère de rayon o, après s'être propagées en partant du centre de l'ellipsoïde E pendant l'unité de temps. Partout sur cette portion de la surface de l'onde, les vibrations sont perpendiculaires à l'axe optique.

Les ondes planes à vitesse variable $\frac{1}{r}$, après s'être écartées parallèlement à elles-mêmes et d'une quantité égale à $\frac{1}{r}$ d'un côté et de l'autre du centre de l'ellipsoïde E, sont toutes en deçà ou toutes au delà des plans tangents à la portion sphérique et parallèles à ces ondes; seulement le couple perpendi-

culaire à l'axe optique se confond avec ces derniers et touche l'onde sphérique. La portion de la surface de l'onde enveloppée par ces ondes est donc tangente à la sphère aux extrémités du diamètre parallèle à l'axe optique, mais pour le reste elle est tout à fait en dehors ou tout à fait en dedans de cette sphère. Quant à sa forme nous pouvons présumer *à priori* que ce sera celle d'un ellipsoïde. Dans ce cas son équation serait nécessairement de la forme :

$$a^2 (x^2 + y^2) + b^2 z^2 = 1,$$

puisque cette portion doit avoir l'axe optique pour axe de rotation. Si nous pouvons maintenant démontrer que par une détermination convenable de a et de b, à chaque onde plane à vitesse variable, correspond un plan parallèle tangent à cet ellipsoïde, de sorte que ce dernier plan est autant éloigné du centre de l'ellipsoïde que l'indique la vitesse correspondante à cette onde plane, il est évident que ce que nous avons avancé se trouvera confirmé et cet ellipsoïde sera réellement la portion cherchée de la surface de l'onde.

Soit donc l'équation d'une onde plane dont les vibrations ont une vitesse variable :

$$P = x \text{ Sin. } \varphi + z \text{ Cos. } \varphi = 0.$$

Sa normale est dans le plan $x\,z$ et fait avec l'axe des z un angle φ : il est évident que notre résultat s'appliquera aussi à tout autre plan, incliné de l'angle φ sur l'axe optique. Parallèlement à P menons un plan tangent à l'ellipsoïde de révolution en question. Soient x' et z' les coordonnées du point de contact qui est dans le plan $x\,z$: l'équation du plan tangent est

$$a^2 x' x + b^2 z' z = 1.$$

Sa distance à l'origine est :

$$D = \frac{1}{\sqrt{a^4 x'^2 + b^4 z'^2}}.$$

Mais maintenant le plan tangent étant parallèle à P on a

$$\frac{b^2 z'}{a^2 x'} = \frac{\text{Cos. } \varphi}{\text{Sin. } \varphi}.$$

Développant et tirant de l'équation de l'ellipsoïde les valeurs de x' et de z' pour les substituer dans l'expression de D, il vient :

$$D = \sqrt{\frac{\text{Cos.}^2 \varphi}{b^2} + \frac{\text{Sin.}^2 \varphi}{a^2}}.$$

Comparons cette valeur à celle de $\frac{1}{r}$ de la vitesse de l'onde, on voit qu'elles s'identifient, si on pose $\frac{1}{b} = o$ et $\frac{1}{a} = e$.

Il en résulte donc qu'en effet la portion cherchée de la surface de l'onde est un ellipsoïde de révolution dont l'axe principal se confond avec l'axe optique et dont l'équation est la suivante :

$$\frac{x^2 + y^2}{e^2} + \frac{z^2}{o^2} = 1.$$

Elle touche la portion sphérique de la surface de l'onde par ses pôles et l'enveloppe comme un *sphéroïde aplati* (Fig. 142, 1), si $e > o$, tandis qu'au contraire si $e < o$ elle en est complétement enveloppée comme un *sphéroïde allongé*.

On obtient la direction des vibrations, qui correspond à un point déterminé de l'onde elliptique et à son plan tangent, en menant un plan méridien par la normale et l'axe de rotation de la surface (Fig. 143) ; ce méridien coupe le

Fig. 142.

1. 2.

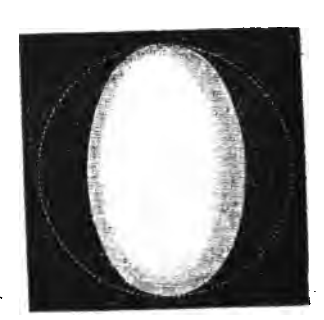
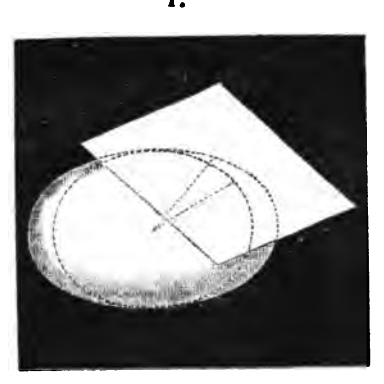
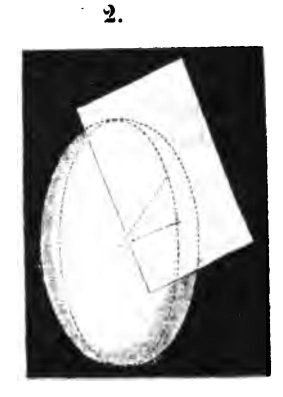


Fig. 143.

1. 2.





plan tangent suivant une droite qui détermine cette direction. Ce plan méridien contient aussi évidemment le rayon vecteur du point de contact, et par conséquent on obtient aussi la direction cherchée en joignant le point de contact au pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent.

PASSAGE DE LA LUMIÈRE D'UN MILIEU ISOTROPE DANS UN CRISTAL A UN AXE OPTIQUE. — DOUBLE RÉFRACTION.

Le phénomène remarquable de la double réfraction, dont nous avons eu déjà occasion de parler dans la première partie, était observé depuis longtemps avant qu'on eût mis hors de doute, par des recherches sérieuses, que la double réfraction était une propriété générale de tous les cristaux, excepté de ceux du système cubique : seulement il ne présente que dans quelques-uns d'entre eux, comme le spath d'Islande et le nitrate de soude, un si haut degré d'évidence qu'on l'y reconnaît immédiatement.

Nous sommes redevables de cette loi à Brewster qui a enrichi l'optique de si belles découvertes. Il démontra l'existence d'un seul et unique axe optique dans un très-grand nombre de cristaux tétragonaux et hexagonaux, de même que sa coïncidence avec l'axe principal cristallographique. A ces importantes observations, il ajouta la découverte, dont nous parlerons plus tard, de la double réfraction à deux axes optiques dans les cristaux des systèmes isoklinique, monoklinique et triklinique, et reconnut dès lors l'importance que possèdent les axes cristallographiques relativement aux propriétés optiques.

Huyghens (mort en 1695), le même qui déduisit la loi de Descartes de la théorie des ondulations, donna une explication satisfaisante de la double réfraction du spath calcaire ; il la déduisit de l'hypothèse d'une surface de l'onde, qui coïncide exactement quant à sa forme et à sa position avec celle que nous avons trouvée par une autre méthode pour les cristaux tétragonaux et hexagonaux.

Le développement le plus important de la loi de Huyghens pour la réfraction du spath d'Islandeet du cristal de roche, la détermination de l'indice de réfraction moyen de ces corps, de même qu'un grand nombre de recherches à l'appui de cette théorie, furent faits par Malus dans sa « *Théorie de la double réfraction* » 1810. La polarisation de la lumière, que ce physicien découvrit en 1808, introduisit dans la théorie de la double réfraction deux nouveaux éléments, la direction de la polarisation et l'intensité. La loi, appelée loi du Cosinus, c'est-à-dire, celle qui détermine pour une incidence

perpendiculaire les intensités des rayons réfractés (voyez 1re partie, page 99), est due aussi à Malus (1). Les phénomènes de polarisation par double réfraction furent développés dans toute leur généralité par l'illustre Fresnel (mort en 1826), dans un mémoire qu'il présenta à l'Académie des Sciences, et qui fut publié en abrégé dans les Annales de chimie en 1825.

Passant, après cette courte notice historique, à l'étude de la réfraction dans les cristaux à un axe, nous remarquerons tout d'abord que dans cette classe de phénomènes l'accord de l'expérience avec la théorie est tellement complet, qu'il est superflu d'indiquer dans la suite, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, les limites de l'une et de l'autre.

Supposons qu'un faisceau de rayons parallèles de lumière non polarisée, ou en d'autres termes, une onde plane, arrivant d'un milieu isotrope ambiant, tombe sur une des faces planes qui limite un cristal tétragonal ou hexagonal.

Les points de la surface de séparation que rencontre le faisceau incident seront, d'après le principe d'Huyghens, les centres d'ondes lumineuses élémentaires qui, prises en particulier, reviennent en partie dans le milieu isotrope, et en partie pénètrent dans le milieu anisotrope. Les demi-ondes qui reviennent dans le milieu isotrope sont de forme sphérique, et se combinent en une nouvelle onde plane, qui, pour la forme, la position et la direction, obéit à la loi de la réflexion sur la surface de séparation des milieux isotropes. Les demi-ondes, au contraire, qui se propagent dans l'intérieur du milieu hétérotrope, prennent la forme de la surface de l'onde qui est propre à ce dernier. Mais celle-ci consiste, comme nous l'avons vu, en une partie sphérique et une partie ellipsoïdale. Les parties sphériques se composent évidemment en une onde plane réfractée absolument de la même manière qu'il arriverait à des ondes sphériques qui pénètreraient dans le second milieu, si celui-ci était isotrope; et cette onde réfractée suivra aussi la loi de la réfraction pour le passage de la lumière d'un milieu isotrope dans un second, c'est-à-dire qu'elle sera perpendiculaire au plan d'incidence, et sera limitée par un cylindre qui lui est perpendiculaire, et a pour directrice le contour de la portion éclairée de la surface réfractante; puis en appelant toujours i l'inclinaison de l'onde incidente, et r celle de l'onde réfractée avec la surface de séparation des deux milieux, on aura :

$$\frac{\text{Sin. } i}{\text{Sin. } r} = \text{Constante.}$$

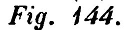
(1) Voyez dans le *repertoir d'optique moderne* de Moigno, tome IV, page 1776, les recherches d'Arago sur cette loi si importante pour la photométrie nouvelle.

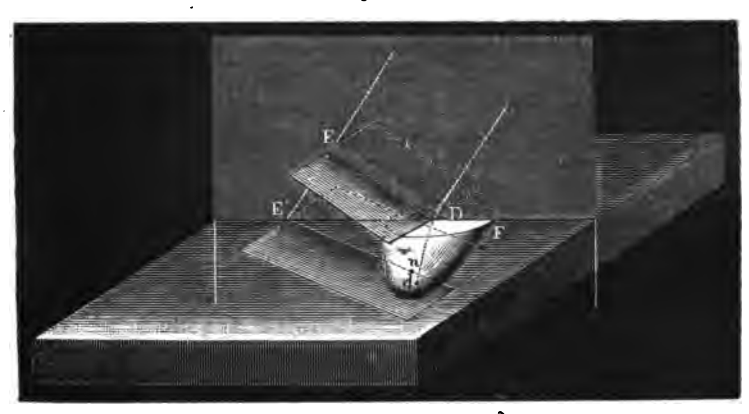
Comme dans le cas de deux milieux ordinaires, ce rapport est encore égal au quotient du rayon de la surface d'onde sphérique dans le premier milieu divisé par celui du second, de telle sorte qu'en représentant celui-ci par o et la vitesse de la lumière dans le premier milieu par v, on a

$$\frac{\text{Sin. } i}{\text{Sin. } r} = \frac{v}{o}.$$

A cause de cette identité avec les phénomènes de la réfraction ordinaire, on a appelé cette onde, dont nous venons de parler, et les rayons qui lui correspondent, *onde* ou *rayon réfracté ordinairement*, ou simplement, *onde* ou *rayon ordinaire*.

Mais il en est tout autrement des ondes qui proviennent des ondes élémentaires ellipsoïdales. Il est vrai qu'elles sont aussi planes et perpendiculaires au plan d'incidence ; mais elles diffèrent des ondes ordinaires par leur délimitation, par la direction de propagation d'un point de leur contour, et par la vitesse de propagation. Nous nous en convaincrons de suite en employant la construction d'Huyghens (voir Ire partie, page 15). Autour du point D (fig. 144), construisons la surface d'onde F du cristal, avec les dimensions qui correspondent au temps pendant lequel le point E de l'onde incidente se propage en E'. Ce


Fig. 144.



temps a pour expression $\frac{EE'}{v}$; d'après les notations que nous avons adoptées, le demi-axe de rotation de cette surface est alors $= o\,\frac{EE'}{v}$ et le rayon de son équateur $= e\,\frac{EE'}{v}$. Elevons en E' une perpendiculaire au plan d'incidence

et par celle-ci menons un plan tangent à la surface de l'onde : ce plan est celui de l'onde réfractée sur laquelle a dû se transporter l'état vibratoire de l'onde DE au bout du temps $\frac{EE'}{v}$. Il est perpendiculaire au plan d'incidence et conserve cette direction, tandis qu'il se propage parallèlement à lui-même dans la direction de sa normale. Mais l'onde réfractée dans ses positions successives sera toujours limitée, d'après le principe d'Huyghens, par le cylindre dont la directrice est le contour de la portion de la surface réfringente frappée par la lumière, et dont la génératrice est parallèle à la droite qui joint le point D au point de contact d de l'onde plane $E'd$ et de la surface de l'onde. Cette ligne de jonction et par conséquent l'axe du cylindre n'est en général ni parallèle au plan d'incidence, ni perpendiculaire à l'onde réfractée. *La direction des rayons réfractés, c'est-à-dire, la direction de leur cylindre limite sort donc du plan d'incidence et est inclinée sur le plan de l'onde ; les rayons se propagent suivant une autre direction que les ondes.*

A cette déviation des lois de la réfraction et de la propagation dans les milieux isotropes, il faut encore ajouter que la vitesse de propagation et la direction des rayons, aussi bien que des ondes, changent avec la position mutuelle du plan réfractant, de l'onde incidente et de l'axe optique.

Ces ondes et ces rayons s'écartant des lois de la réfraction ordinaire seront appelés *extraordinairement* refractés ou simplement *ondes* ou *rayons extraordinaires*.

Nous regardons comme superflu d'insister davantage sur la différence des ondes ou des rayons ordinaires et extraordinaires, quant à leur direction de polarisation ; cela se déduit facilement de tout ce que nous avons dit. De même il n'est pas difficile de trouver l'expression de la vitesse d'un rayon suivant une direction donnée. Elle est, en effet, mesurée par la longueur du rayon de la surface de l'onde construite pour l'unité de temps, dans la direction même du rayon lumineux. Représentons dès lors la vitesse de ce dernier par S, et son inclinaison sur l'axe optique par ψ, on a :

$$S = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{o^2}\,\text{Cos.}^2\,\psi + \frac{1}{e^2}\,\text{Sin.}^2\,\psi}}.$$

Nous aurions ici à résoudre, pour le passage de la lumière d'un milieu isotrope dans un milieu hétérotrope, le problème général suivant : pour une incidence quelconque et une position quelconque de l'axe optique relativement au plan d'incidence et au plan de séparation, déterminer la propagation et la

polarisation de la lumière réfractée, ou bien seulement des ondes et des rayons extraordinaires, puisque ceux qui sont réfractés ordinairement ont des lois déjà connues. Nous allons indiquer la marche générale à suivre pour la solution de cette question et étudier ensuite quelques cas particuliers.

D'abord, déterminons la direction et la vitesse des *ondes* réfractées. Reprenons la construction de la figure 144, dans laquelle nous supposerons, ce qui ne détruit pas la généralité, que la longueur DE' est égale à l'unité. Soit en outre i l'inclinaison de l'onde incidente sur la surface réfractante, r l'inclinaison de l'onde réfractée, n le pied d'une perpendiculaire menée par le point D à l'onde réfractée dans le plan d'incidence. Supposons trois axes d'un système de coordonnées rectangulaires dont celui des z est normal à la surface de séparation en D, et celui des x, dans le plan d'incidence, et soient u, v, w les cosinus des angles que l'axe optique fait avec ces trois axes. En représentant par W la vitesse de l'onde réfractée on aura :

$$E'E : Dn = \text{Sin. } i : \text{Sin. } r = v : W.$$

d'où

$$1) \ \text{Sin. } r = \frac{W}{v} \text{Sin. } i.$$

Mais si φ représente l'angle de l'axe optique avec la normale à l'onde, on a :

$$2) \ W = \sqrt{o^2 \text{Cos.}^2 \varphi + e^2 \text{Sin.}^2 \varphi} = \sqrt{e^2 + (o^2 - e^2) \text{Cos.}^2 \varphi}.$$

et pour déterminer φ

$$3) \ \text{Cos. } \varphi = \text{u Sin. } r + \text{w Cos. } r.$$

De 1) et 3) on déduit, en représentant par ε et ω les constantes $\frac{v}{e}$ et $\frac{v}{o}$:

$$\text{Sin.}^2 r = \text{Sin.}^2 i \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) (\text{u Sin. } r + \text{w Cos. } r)^2 \right]$$

et de cette équation on peut tirer la valeur de r, direction de l'onde réfractée, en fonction des constantes ε, ω, u, v, w, et de l'angle d'incidence. Une fois r trouvé, l'équation 3) donne la valeur correspondante de φ et par suite l'équation 2) la vitesse de l'onde.

Comme cas à remarquer nous pouvons indiquer ici celui où l'axe optique est perpendiculaire au plan d'incidence. Alors u = 0, w = 0 et v = 1 ; on trouve pour r :

$$\text{Sin. } r = \frac{1}{\varepsilon} \text{Sin. } i.$$

Nous voyons d'après cela, qu'alors la réfraction a lieu suivant la loi de Descartes, et un coup d'œil jeté sur les figures 145 et 146 qui représentent la construction d'Huyghens pour ce cas, suffit pour nous en convaincre im-

médiatement. Le coefficient $\frac{1}{\varepsilon}$ est indépendant de la direction de l'onde réfractée et est égal au quotient de la vitesse v de la lumière dans le milieu isotrope

Fig. 145.

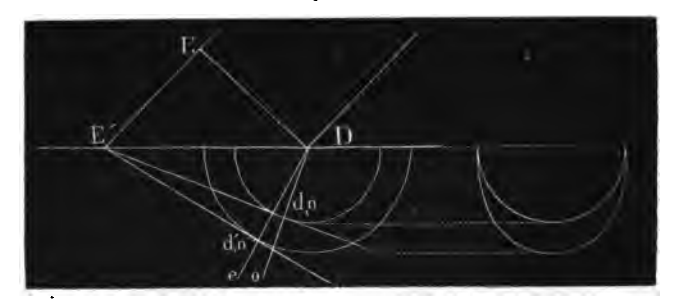
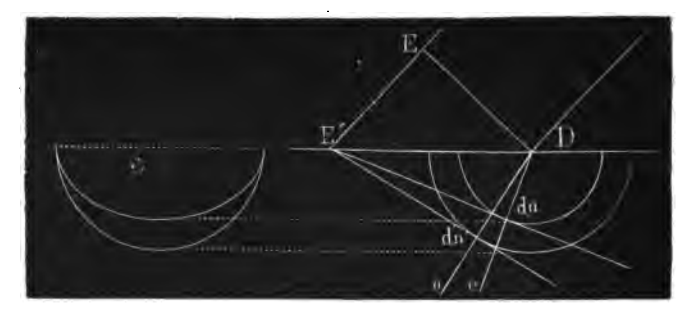


Fig. 146.



par la longueur du rayon équatorial e de la surface de l'onde : nous appellerons la quantité ε *l'indice de réfraction principal* des ondes extraordinaires. Les vibrations des ondes réfractées sont ici perpendiculaires au plan d'incidence.

Il faut encore remarquer en outre le cas où l'axe optique est dans le plan d'incidence, et où l'angle d'incidence a une valeur telle que l'onde réfractée est perpendiculaire à l'axe optique. Les rapports mutuels entre la position de l'axe optique, et les angles d'incidence et de réfraction, auxquels cela correspond, sont donnés par les équations :

$$u \text{ Sin. } r + w \text{ Cos. } r = 1 \text{ et Sin. } r = \frac{1}{\omega} \text{ Sin. } i.$$

en laquelle dernière se change l'équation pour Sin. r à cause de la première relation. Comme nous le voyons, les ondes extraordinaires seront ici réfractées comme les ondes ordinaires : la direction de leurs oscillations sera aussi indé-

terminée, puisque leur normale arrive à coïncider avec l'axe optique. La partie sphérique et la partie ellipsoïdale de la surface de l'onde touchant le plan E'*d* au même point, la différence entre la réfraction ordinaire et la réfraction extraordinaire disparaît. (Figures 147 et 148.)

Fig. 147.

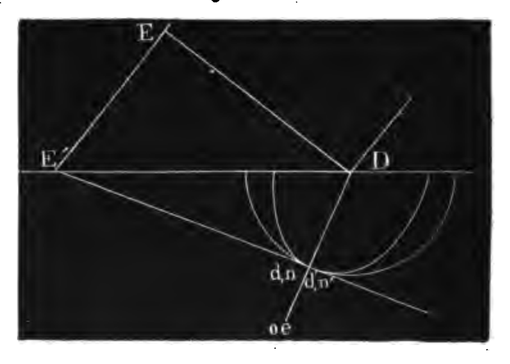
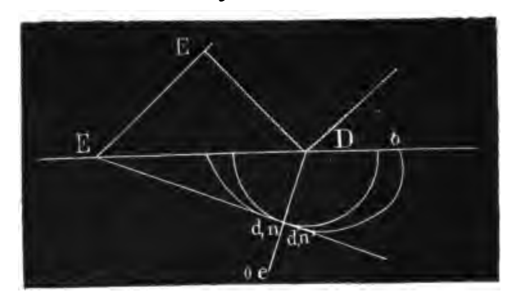


Fig. 148.



Etudions maintenant les *rayons* réfractés. Les demi-axes de la surface F, qui nous sert pour trouver la lumière réfractée, sont d'après notre système de notations :

$$\frac{EE'}{v} e = \frac{e}{v} \text{ Sin. } i = \frac{\text{Sin. } i}{\epsilon} \text{ et } \frac{EE'}{v} o = \frac{o}{v} \text{ Sin. } i = \frac{\text{Sin. } i}{\omega}$$

Représentons-les par a et b, et puisque le plan de l'équateur doit être représenté par l'équation : $A = u\,x + v\,y + w\,z = 0$, nous obtenons pour la surface F :

$$\frac{1}{a^2}[x^2 + y^2 + z^2] + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)[ux + vy + wz]^2 = 1.$$

Soient x', y', z', les coordonnées du point d et A' la valeur que prend A après la substitution de x', y', z', alors l'équation du plan tangent à F en d est :

$$\left[\frac{1}{a^2}x' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)A'u\right]x + \left[\frac{1}{a^2}y' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)A'v\right]y$$
$$+ \left[\frac{1}{a^2}z' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)A'w\right]z = 0.$$

Cette équation maintenant doit être identique à celle de l'onde plane réfractée : mais cette dernière est :

$$x \,\text{Sin.}\, r + z \,\text{Cos.}\, r = \text{Sin.}\, r$$

ou

$$x + z \,\text{Cotg.}\, r = 1.$$

Nous avons donc :

$$1) \quad \frac{1}{a^2}x' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)A'u = 1,$$

$$2) \quad \frac{1}{a^2}y' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)A'v = 0,$$

$$3) \quad \frac{1}{a^2}z' + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)A'w = \text{Cotg.}\, r.$$

Au moyen des équations 1) et 2) et de celle de la surface F ou, puisque r est déjà connu d'autre part, par les équations 1) 2) et 3), les coordonnées x' y' z' seront déterminées, et aussi la direction du rayon Dd, pour lequel on a :

$$\frac{z}{x} = \frac{z'}{x'} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}.$$

A l'aide de ces coordonnées on calculera ensuite les cosinus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ de l'angle que le rayon fait avec les axes coordonnés, comme il suit :

$$\mathfrak{a} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \mathfrak{b} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \mathfrak{c} = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

et ceux-ci donneront l'angle ψ du rayon avec l'axe optique par la formule :

$$\text{Cos.}\, \psi = \mathfrak{a}\, u + \mathfrak{b}\, v + \mathfrak{c}\, w.$$

Enfin ces valeurs trouvées, l'équation de S de la page 226 nous donne la vitesse du rayon.

Le plan d'oscillation du rayon et de l'onde correspondante se détermine par la direction du premier et la normale à la dernière : on trouve d'après cela facilement pour son équation :

$$\frac{y'}{x'}x + \left(\frac{z'}{x'}\,\text{tang.}\, r - 1\right)y - \frac{y'}{x'}\,\text{tang.}\, r \cdot z = 0.$$

Pour que le rayon réfracté ne quitte pas le plan d'incidence, la coordonnée

y' doit disparaître. Cela ne peut arriver que dans deux cas : savoir si v s'annulle ou bien A' (voir équation 2). La quantité v disparaît si l'axe optique est dans le plan d'incidence (figures 149 et 150). En même temps l'équation

Fig. 149.

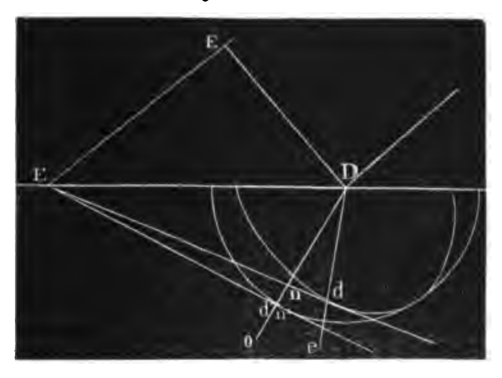
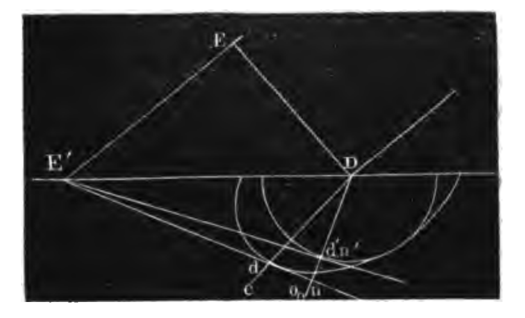


Fig. 150.



du plan d'oscillation se réduit à $y = 0$, c'est-à-dire que la direction des vibrations est également dans le plan d'incidence. Il n'y a que dans le cas particulier où le coefficient d'y disparaît que la direction des vibrations est indéterminée, c'est-à-dire, si l'on a :

$$\frac{z'}{x'} \text{ tang. } r - 1 = 0.$$

Cela arrive quand le rayon vecteur Dd est perpendiculaire à l'onde réfractée, quand par conséquent l'onde réfractée est tangente à la surface de l'onde en un de ses pôles. Dans ce cas remarquable, la réfraction a donc lieu absolument de la même manière que lors du passage de la lumière d'un milieu simplement

réfringent dans un second aussi isotrope; l'indice de cette réfraction est ω.

En second lieu la direction du rayon est dans le plan d'incidence si $A' = 0$, c'est-à-dire, si la surface de l'onde est touchée en un point de son équateur. alors l'axe optique est parallèle à l'onde réfractée. En général, pour chaque position de l'axe optique on peut trouver une incidence déterminée pour laquelle cela aura lieu. En effet, on mène à l'extrémité du rayon, suivant lequel l'équateur de la surface de l'onde est coupé par le plan d'incidence, un plan tangent à cette surface. Si celui-ci fait avec la surface réfractante un angle r, il est évident qu'une onde dont l'incidence serait déterminée par l'équation $\text{Sin.}\, i = \varepsilon\, \text{Sin.}\, r$, sera réfractée de manière à se confondre avec le plan tangent en question et sera parallèle à l'axe optique. L'angle i a une valeur réelle tant que $\text{Sin.}\, r$ est compris entre 0 et $\frac{1}{\varepsilon}$. C'est dans ces limites seulement qu'aura lieu la réfraction dont nous parlons. Si l'équateur est tout à fait dans le plan d'incidence, l'axe optique est perpendiculaire à ce dernier et cette réfraction a lieu pour toute incidence.

Que l'un ou l'autre cas ait lieu, l'équation de la page 230, qui donne la direction de la vibration, sera indéterminée, puisque normale et rayons se confondent. Toutefois on ne peut pas en conclure que la direction des vibrations est elle-même indéterminée, car nous savons qu'elle est dans le plan qui contient la normale et l'axe optique. Elle sera perpendiculaire au plan d'incidence si l'axe optique l'est.

Quelle que soit aussi la forme de la surface de l'onde, les ondes extraordinaires seront en général ou plus fortement réfractées, ou moins fortement que les ondes ordinaires. Le premier cas arrive pour les cristaux dont la surface de l'onde pour les vibrations extraordinaires est un sphéroïde allongé; en effet pour $e < o$ la valeur de W sera toujours surpassée par la vitesse o des ondes ordinaires, et par suite la normale aux ondes extraordinaires sera toujours par la réfraction plus rapprochée de la normale au point d'incidence, que celle des ondes ordinaires. On exprime mieux ce phénomène en disant que la normale au point d'incidence semble attirer les ondes extraordinaires; et à cause de cela M. Biot appela ces cristaux milieux *attractifs* ou *positifs*. C'est à eux qu'appartient entre autres le cristal de roche (1).

Dans les cristaux qui possèdent comme le spath d'Islande, une surface d'onde aplatie pour les vibrations extraordinaires, c'est le contraire qui a lieu;

(1) Nous ferons abstraction ici de la double réfraction circulaire ou elliptique, dont l'étude ne serait pas à sa place dans cette introduction.

la valeur de W surpasse toujours celle de *o*, et les ondes extraordinaires sont moins déplacées de leur direction primitive vers la normale au point d'incidence que les ondes ordinaires. C'est pourquoi M. Biot qualifia la double réfraction de ces milieux du nom de *répulsive* ou *négative*.

Quant aux *rayons* extraordinaires ils se rapprocheront tantôt plus, tantôt moins de la normale au point d'incidence, comparativement aux rayons ordinaires, suivant que le milieu sera positif ou négatif.

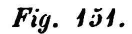
Dans les cristaux à un axe optique positif l'indice principal de réfraction ϵ des ondes et des rayons extraordinaires surpasse l'indice ω des rayons ordinaires : c'est le contraire dans les cristaux négatifs.

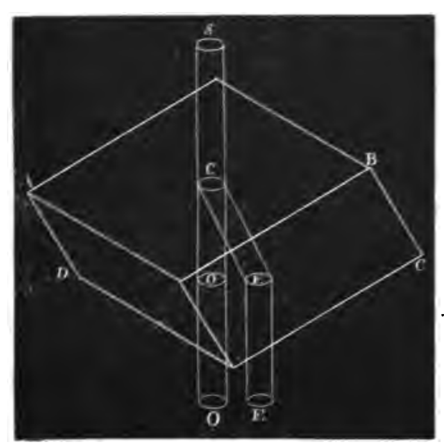
Les lois qui régissent le passage de la lumière d'un milieu simplement réfringent dans un cristal à un axe optique par une surface de séparation plane donnent, une fois connues, les fondements de la dioptrique de ces deux classes de corps, et pour la développer on ne saurait être arrêté que par les difficultés du calcul. Nous l'avons suffisamment examiné dans ce qui précède, abstraction faite toutefois des rapports d'intensité; nous allons maintenant appliquer ces lois à quelques cas très-simples de dioptrique, en même temps que nous porterons notre attention sur l'intensité de la lumière autant que nous le pourrons. Les phénomènes de dioptrique seront le plus simple possible dans le mouvement de la lumière à travers des plaques à surfaces planes parallèles : celles-ci vont donc nous occuper d'abord. Les résultats auxquels nous arriverons seront toujours faciles à vérifier, puisque nous possédons dans le spath d'Islande un corps doublement réfringent qui joint à une transparence parfaite un haut degré de double réfraction et qui se laisse travailler sans peine.

Voici quelques indications qui suffiront pour tailler une face plane dans un cristal. On le lime d'abord dans la direction que cette face doit avoir, ou on le frotte sur une plaque métallique avec de l'émeri et de l'eau, ou bien, si le cristal est soluble dans l'eau, sur une lame de verre dépoli avec de l'eau seule. Pour abréger cette opération, surtout pour les corps durs, on visse la lame métallique sur le tour, on la met en rotation, et l'on presse contre elle le cristal dans la direction convenable. Lorsqu'on a obtenu de cette façon une surface plane, on lui donne du poli en la frottant sur une seconde lame métallique recouverte de papier ou de soie et en employant comme polissoir le plus convenable du rouge d'Angleterre ou de Paris. On y arrive encore plus promptement en employant le tour. Pour obtenir plus sûrement la direction désirée, et aussi pour pouvoir plus facilement tenir le cristal à la main pendant toutes ces opérations, on le fixe solidement à une pince avec de la gomme laque.

1) PHÉNOMÈNES DIOPTRIQUES DES PLAQUES CRISTALLINES A FACES PARALLÈLES.

Pour examiner d'abord le cas le plus général admettons que les axes optiques soient inclinés sur les faces du cristal. Nous avons une plaque très-convenable pour cela dans le spath d'Islande rhomboédrique ABCD (fig. 151). Nous regarderons deux faces de clivage quelconques opposées comme les surfaces limites parallèles (fig. 151). L'axe optique, la ligne qui joint les sommets des angles trièdres égaux (B, D) est inclinée de 45° 23' sur chacune de leurs faces. En utilisant le clivage du cristal nous pouvons facilement changer à volonté l'épaisseur de la plaque. Sur une lame ainsi préparée faisons tomber d'abord normalement un faisceau limité de rayons parallèles. L'onde plane qui leur correspond est parallèle à la surface réfractante : les ondes réfractées le seront également. Les ondes *ordinaires* et les rayons (en particulier) tout en se propageant dans le cristal avec la vitesse o, coïncideront en direction et en forme avec les ondes et les rayons incidents : on peut les regarder comme les prolongements de ces derniers; mais toutefois il ne faut pas perdre de vue qu'en général ils en diffèrent en intensité et en polarisation. Quant à celle-ci, la direction des vibrations est perpendiculaire à l'axe optique, par conséquent aussi à un plan mené par cet axe perpendiculairement à la plaque. On a appelé ce plan, la *section principale* (1) du cristal; son intersection avec une des faces est parallèle aux bissectrices des angles plans A, B. Quand les ondes ordinaires sortant de la seconde face de la plaque repassent dans le milieu


Fig. 151.



(1) Comme l'axe optique n'est pas en général une ligne définie, mais seulement une direction, nous entendons aussi par section principale non pas un plan déterminé, mais seulement la direction de tout plan parallèle à l'axe optique et à la normale d'incidence.

isotrope ambiant, elles ont il est vrai diminué d'intensité parce qu'elles ont éprouvé une perte par le fait de la réflexion, mais d'un autre côté il n'y a pas de raisons pour admettre qu'elles aient subi un changement quant à la direction, la forme et la polarisation. D'après cela les rayons ordinaires sortant du cristal seront limités par le même cylindre que les rayons incidents et se propageront dans la même direction et avec la même vitesse que ceux-ci. Mais ils s'en distinguent par une intensité moindre, en outre parce que *la direction de leurs vibrations est toujours perpendiculaire à la section principale* et enfin par un retard qu'ils ont subi en traversant le cristal. En effet, pendant que ce trajet a lieu, les ondes incidentes auraient parcouru dans le milieu ambiant un chemin plus long que celles qui se meuvent dans le cristal (1). A cause de cette différence des deux chemins, les rayons qui quittent le cristal devront être en retard par rapport aux rayons incidents qui se seraient propagés directement. Représentons par D l'épaisseur de la plaque, le temps nécessaire pour la traverser sera $\frac{D}{o}$ et pendant ce temps l'onde parcourrait dans le milieu isotrope un chemin $\frac{v}{o}$ D; la grandeur de la différence en question est donc $\frac{v-o}{o} D = (\omega - 1) D$. Le retard correspondant est $\frac{v-o}{vo} D$ et à la phase des ondes incidentes il faut ajouter la quantité $-(\omega - 1) D$ pour avoir la phase des rayons sortant du cristal. Ainsi, par exemple, en admettant que les vibrations des ondes incidentes soient dans la même direction que celles des ondes ordinaires et que l'équation des premières, soit :

$$y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} [vt - x + A]$$

celle des dernières serait :

$$y = a' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} [vt - x + A - (\omega - 1) D].$$

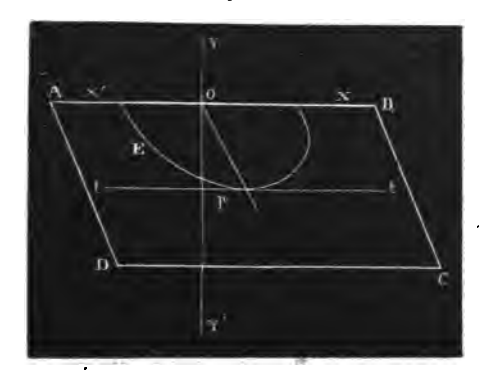
Bien que nos formules soient également applicables au cas particulier de l'incidence perpendiculaire, nous préférons cependant chercher les propriétés de la lumière réfractée *extraordinairement* par l'emploi direct de la construction d'Huyghens. Traçons donc pour trois points quelconques P_1, P_2 et P_3 de la

(1) Nous sous-entendons ici bien entendu qu'il s'agit du cas le plus ordinaire où le le milieu ambiant serait l'air et par conséquent serait moins réfringent que le cristal.

partie éclairée de la face réfractante les surfaces d'onde des vibrations extraordinaires. Un plan tangent mené à ces trois surfaces sera l'onde réfractée extraordinaire. Elle sera évidemment parallèle à la surface réfractante. Soient p_1, p_2, p_3 ses points de contact, les lignes de jonction P_1p_1, P_2p_2, P_3p_3 donnent la direction des rayons réfractés. Nous n'avons donc qu'à mener par le contour de la surface éclairée une surface cylindrique dont les arêtes sont parallèles à ces lignes et nous obtenons ainsi la limite du faisceau réfracté extraordinaire. Son plan d'oscillation passe par l'axe optique et la normale aux ondes, et se confond dès lors avec la section principale. *Les rayons réfractés extraordinairement, de même que leurs vibrations, sont donc dans la section principale* et c'est pourquoi on a donné à ce plan un nom particulier.

Pour déterminer analytiquement la position du rayon extraordinaire, menons dans la section principale un système de coordonnées dont l'axe des x sera l'intersection de la section principale et de la surface réfractante et l'axe des y une perpendiculaire au premier. La surface de l'onde tracée autour de l'origine sera coupée par la section principale suivant une ellipse dont l'équation, en représentant par φ l'angle de l'axe optique et de la verticale, sera :

Fig. 152.



$$E = \frac{1}{e^2}(x^2 + y^2) + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{e^2}\right)(x \text{ Sin. } \varphi + y \text{ Cos. } \varphi)^2 - 1 = 0.$$

Menons à cette ellipse une tangente tt parallèle à l'axe des x, le point de contact p coïncide évidemment avec le point de contact de la surface de l'onde et d'un plan tangent parallèle à la surface réfractante et la ligne po, qui le joint à l'origine, est la direction du rayon réfracté extraordinaire. Mais on sait que l'équation de cette ligne est :

$$\frac{dE}{dx} = 0, \text{ ou :}$$

$$x\left[\frac{1}{e^2} + \left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{e^2}\right)\text{Sin.}^2 \varphi\right] + y\left(\frac{1}{o^2} - \frac{1}{e^2}\right)\text{Sin. } \varphi \text{ Cos. } \varphi = 0.$$

Dans le cas dont il s'agit on peut avoir, pour l'inclinaison du rayon extraordinaire sur l'axe optique, une expression plus simple. Remarquons en effet que la direction du rayon et celle de l'axe des x sont dans l'ellipse E deux diamètres conjugués. Soit donc ψ l'angle de la direction du rayon avec l'axe optique, on a :

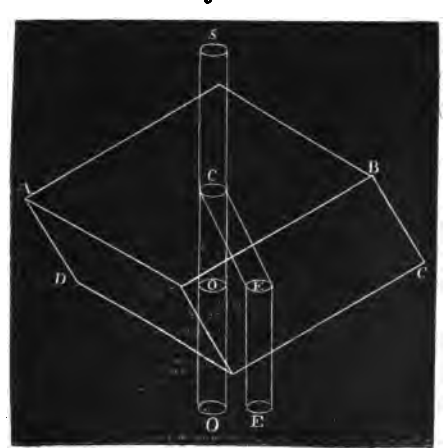
$$\text{Tang. } \psi \text{ Cotg. } \varphi = \frac{e^2}{o^2}.$$

L'observation de l'angle ψ nous permet de conclure le rapport entre e et o, rapport que l'on peut poser comme mesure de la double réfraction, attendu que les phénomènes de la double réfraction sont d'autant plus frappants, qu'il est plus grand.

La formule pour S de la page 226 et celle pour W de la page 219 nous donnent en fonction de ψ et de φ la vitesse des rayons et des ondes extraordinaires.

La seconde face de la plaque étant rencontrée par les ondes extraordinaires, une portion de ce mouvement lumineux se réfléchit dans l'intérieur du cristal, mais la plus grande partie l'abandonne comme ondes planes. En pénétrant dans le milieu isotrope, les rayons redeviennent perpendiculaires à l'onde plane et reprennent la vitesse qui correspond au milieu isotrope et à leur couleur : mais la direction de leurs vibrations est évidemment la même que dans le cristal, c'est-à-dire, elle est parallèle à la section principale. Il sort donc du cristal un second faisceau lumineux normal, dont la base, différente de celle du faisceau des rayons ordinaires, est la portion de la seconde face frappée par la lumière extraordinairement réfractée. Cette portion est identique à la partie éclairée de la première face et par conséquent aussi à celle de la seconde rencontrée par la lumière ordinairement réfractée; mais par rapport à cette dernière elle est déviée dans le plan de la section principale.

Fig. 153.



Soit C O (Fig. 153), un rayon du faisceau réfracté ordinaire, CE un rayon du faisceau extra-

ordinaire, l'écart du faisceau extraordinaire EE deux fois réfracté, par rapport au faisceau OO, ou au faisceau incident, est mesuré par la longueur EO : on a pour celle-ci en appelant D l'épaisseur de la plaque :

$$EO = D \text{ Tang. } (\psi - \varphi).$$

Le retard qu'éprouve le rayon extraordinaire, sera $\frac{v - W}{W} D$, comme on le déduirait d'un raisonnement semblable à celui de la page 235, et il dépend, en outre de la nature et de l'épaisseur de la plaque, de la position de l'axe optique. Supposons que les vibrations incidentes aient la même direction que les vibrations extraordinaires et soient représentées par l'équation :

$$y = b \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + B).$$

les rayons du faisceau extraordinaire devront être représentées par :

$$y = b' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} \left[vt - x + B - \left(\frac{v}{W} - 1 \right) D \right]. \text{ (1)}$$

Les conséquences précédentes nous suffisent pour nous rendre compte de tous les phénomènes que nous avons observés à propos de la polarisation de la lumière. Il est donc complétement inutile de nous étendre davantage sur les rapports d'intensité de la lumière sortant du cristal, sur sa polarisation, sa composition, sa relation avec la lumière incidente : ce sont là des questions que nous avons traitées avec assez de détails dans la première partie.

Si un faisceau de rayons parallèles tombe sur une lame cristalline à faces planes parallèles, dont l'axe optique est incliné, et sous une incidence autre que l'incidence perpendiculaire, pour déterminer les rayons réfractés on devra recourir aux formules générales. Il est tout d'abord évident que dans ce cas encore il sortira du cristal deux faisceaux de rayons parallèles au rayon incident et tous deux polarisés en ligne droite. Mais, quant à l'appréciation exacte de la direction de leur polarisation et de leur intensité, nous ne pouvons rien en dire ici. Pour des angles d'incidence peu considérables, ces quantités devront toutefois s'éloigner peu de celles qui existent pour l'incidence normale, c'est-à-dire que les vibrations du rayon réfracté ordinaire seront presque perpendiculaires à la section principale, tandis que celles du

(1) Cette formule, ainsi que celle de la page 235, ne s'applique qu'à la lumière qui traverse directement le cristal. Outre celle-ci, les rayons OO et EE en renferment encore qui a été réfléchie 2 fois, 4 fois, etc., entre les surfaces limites, mais son intensité est très-faible comparativement à celle de la première.

faisceau extraordinaire seront presque dans ce plan. Et si la lumière incidente est polarisée en ligne droite, et que a mesure l'amplitude de ses vibrations, tandis que leur direction forme avec l'axe principal un angle α, on peut, d'une manière approchée, poser pour l'amplitude du rayon ordinaire $\mu\, a$ Sin. α, et pour celle du rayon extraordinaire $\nu\, a$ Sin. α; μ et ν étant deux constantes qui diffèrent peu de l'unité. On peut aussi de ce dernier cas déduire, d'une manière très-approchée, celui où la polarisation de la lumière incidente serait autre que rectiligne, ou bien n'existerait pas, ou enfin serait partielle. Les erreurs qui résultent de cette approximation peuvent être négligées dans beaucoup de cas, parce que la force doublement réfringente est dans beaucoup de cas très-faible et que les ondes à leur entrée dans le milieu cristallisé sont encore plus rapprochées par l'effet de la réfraction du parallélisme avec la face réfractante.

Si pour une incidence oblique on tourne la plaque cristalline autour de sa normale, le faisceau réfracté ordinaire ne change pas de position, tandis que le faisceau extraordinaire se déplace dans le sens de la rotation, mais non pas comme lors de l'incidence perpendiculaire, et en restant à la même distance du rayon ordinaire. Cette distance oscille plutôt entre un maximum et un minimum, qui ont lieu quand le rayon incident passe par la section principale. La trajectoire d'un rayon extraordinaire peut être, d'après cela, tout à fait en dehors du rayon ordinaire correspondant au même point de la surface réfractante, mais elle peut aussi le rencontrer ou enfin l'envelopper. Dans ces phénomènes la section principale se présente toujours naturellement comme un plan de symétrie. Toutes les fois qu'elle coïncide avec le plan d'incidence, les vibrations du rayon ordinaire lui sont perpendiculaires, tandis que celles du rayon extraordinaire s'y trouvent contenues. L'angle des deux plans est-il droit, les vibrations du rayon ordinaire se font juste dans le plan d'incidence, mais celles du rayon extraordinaire prennent une direction oblique par rapport à ce plan.

2) Lames cristallines parallèles a l'axe optique.

Les apparences dans les lames dont les faces sont parallèles à l'axe optique, peuvent se déduire facilement du § 1), mais on les découvre aussi bien en employant immédiatement la construction d'Huyghens : en appliquant cette dernière méthode nous nous bornerons à rapporter les cas les plus dignes d'attention.

Un faisceau de rayons parallèles tombant normalement se propage dans le

cristal sans changer de *limite* et de *direction*, et en sort de la même façon. Les ondes planes réfractées ordinaires et extraordinaires dont se compose en général le mouvement lumineux dans le cristal, sont dès lors parallèles à la face réfractante, et se distinguent l'une de l'autre par leur intensité, le sens de leur polarisation et leur vitesse. La direction des vibrations des ondes ordinaires est perpendiculaire à la section principale, celle des ondes extraordinaires est dans ce plan. La vitesse des premières est o, celle des secondes est e. La lumière sortant du cristal est alors la résultante de deux faisceaux coïncidents, dont les plans de vibrations sont perpendiculaires, et qui, ayant en général une amplitude différente, ont subi par rapport à la lumière incidente un retard différent. Supposons que celle-ci soit formée de vibrations perpendiculaires à l'axe optique, alors, sans déterminer de vibrations extraordinaires, elle se propagera en ondes ordinaires : si l'équation de la lumière incidente est :

$$y = a \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + A).$$

celle de la lumière deux fois réfractée sera :

$$y = a' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + A - (\omega - 1) D).$$

Si la lumière incidente était polarisée perpendiculairement à la section principale, on aurait de même pour la lumière extraordinaire deux fois réfractée :

$$y = a'' \text{ Sin. } \frac{2\pi}{\lambda} (vt - x + A - (\epsilon - 1) D).$$

En outre dans les cristaux incolores a' et a'' ne diffèrent pas entre eux d'une manière appréciable.

Si un rayon de lumière tombe obliquement sur la lame, il sortira de celle-ci deux rayons polarisés parallèles au premier et plus ou moins écartés l'un de l'autre. Pour un angle d'incidence faible, on peut admettre d'une manière approchée que le rayon ordinaire oscille perpendiculairement à la section principale et l'autre dans ce plan. Ce serait juste le cas, si le rayon incident était dans la section principale. Si, en partant de là, on fait tourner la plaque autour de sa normale, le rayon ordinaire ne change pas de position, et autour de lui, le rayon extraordinaire tourne dans le sens de la rotation de la plaque. Après une rotation de 90°, ce dernier rayon est revenu dans le plan d'incidence, alors ses vibrations sont perpendiculaires à ce plan, tandis qu'elles s'y trouvaient à la position du départ, et ce rayon, dans un cristal négatif est le plus écarté possible de la normale au point d'incidence, tandis qu'il en est le plus rapproché dans un cristal positif, c'était le

contraire dans la position du départ. En tournant au delà de 90°, l'autre moitié de la trajectoire est décrite de la même manière, et quand la rotation est de 180°, les phénomènes se reproduisent, les mêmes qu'au commencement.

3) LAMES CRISTALLINES TAILLÉES PERPENDICULAIREMENT A L'AXE OPTIQUE.

Tout plan d'incidence est ici une section principale et tout est symétrique autour de la normale. Pour une incidence perpendiculaire la lame se comporte comme un milieu simplement réfringent : le rayon incident la traverse sans changer de direction, de limite, ni de polarisation ; tandis qu'il éprouve un retard comme cela arriverait, au reste, si le milieu était isotrope. Et si l'on regarde à travers la lame on ne voit qu'une image unique d'un objet éloigné.

Un rayon qui tombe obliquement est partagé en rayon ordinaire et rayon extraordinaire. Les vibrations du premier sont toujours perpendiculaires au plan d'incidence, celles du second sont dans ce plan. Les faisceaux sortant du cristal n'éprouvent aucun changement dans leurs rapports quand on tourne la plaque autour de sa normale. Le rayon extraordinaire est, dans le plan d'incidence, plus ou moins rapproché de la normale par rapport au rayon ordinaire, suivant que la double réfraction est positive ou négative.

4) PRISMES ET CRISTAUX DOUBLEMENT RÉFRINGENTS.

Détermination des constantes optiques d'un cristal à un axe. — En expliquant le compensateur de M. Babinet dans la première partie (page 97), nous avons eu déjà à nous occuper d'une manière assez nette du cas le plus simple de la réfraction dans un prisme d'une substance cristalline, et nous avons appris à en faire une application importante. Nous allons poursuivre cette étude, maintenant que nous en connaissons les points fondamentaux.

Si l'on dirige sur l'une des faces d'un prisme dont l'arête réfringente est parallèle à l'axe optique un rayon lumineux, de manière qu'il arrive perpendiculairement à cette arête, et par conséquent à l'axe optique, chacun des rayons réfractés en lesquels se divise le rayon incident, suit la loi de Descartes pour les milieux isotropes (voyez page 227). Les deux rayons restent dans le plan d'incidence perpendiculaire à l'arête : et ils ne le quittent pas non plus quand ils repassent par la seconde face dans le milieu ambiant. Pendant tout le trajet, la direction des vibrations du rayon ordinaire reste perpendiculaire à l'arête, celle du rayon extraordinaire lui est parallèle. Les indices de réfrac-

tion des deux rayons étant différents, ils divergeront après avoir traversé le prisme : pour un cristal positif le rayon extraordinaire, et pour un cristal négatif le rayon ordinaire seront le plus écarté de la direction d'incidence. Dans un prisme de cette espèce les caractères de la double réfraction se manifestent donc aussitôt : mais ce qu'il y a encore de plus important, c'est qu'au moyen de ce prisme nous sommes à même d'obtenir le mieux possible l'indice de réfraction des rayons ordinaires et l'indice de réfraction principal du rayon extraordinaire pour les différentes couleurs du spectre, et, par là, toutes les quantités dont la connaissance nous met à même de déterminer par avance, même quantitativement, toutes les particularités de la double réfraction. Une pareille détermination devait être évidemment d'une grande utilité pour la science : elle fut faite par Rudberg (1) au moins pour les cristaux les plus employés, le spath calcaire négatif et le cristal de roche positif. Rudberg plaçait un prisme de cet espèce devant la lunette d'un théodolithe, de manière que son arête fut parallèle à la fente par laquelle il faisait arriver les rayons du soleil. Le prisme partageait ceux-ci en deux spectres qui dans le spath d'Islande étaient tout à fait séparés, mais qui dans le cristal de roche se recouvraient en partie. Pour les recherches dans ce dernier cristal, il éteignait un spectre ou l'autre au moyen d'un polarisateur (une plaque de tourmaline) placée sur la route des rayons et dont le plan d'oscillation était placé une fois vertical, l'autre fois horizontal. Alors, d'après la méthode indiquée à la page 35, on détermine pour chacune des raies de Frauenhofer qu'on étudie le minimum de déviation et on en déduit, ainsi que de l'angle réfringent, l'indice correspondant. La table suivante contient les résultats de Rudberg, l'indice du rayon ordinaire est désigné par ω, celui du rayon extraordinaire par ε.

1. Spath.

RAYONS.	B	C	D	E	F	G	H
ω	1,65308	1,65452	1,65850	1,66360	1,66802	1,67617	1,68330
ε	1,48391	1,48455	1,48635	1,48868	1,49075	1,49453	1,49780

(1) *Réfraction de la lumière colorée dans le spath calcaire et dans le cristal de roche.* Ann. de Pogg. XIV.

2. Cristal de roche.

RAYONS.	B	C	D	E	F	G	H
ω	1,54090	1,54181	1,54418	1,54711	1,54965	1,55425	1,55817
ε	1,54990	1,55085	1,55328	1,55631	1,55894	1,56365	1,56772

Si pour les expériences rapportées plus haut on emploie un prisme de spath d'un petit angle réfringent, on voit dans la lunette, à la place des deux spectres complets, deux images étroites de la fente qui sur les bords et du même côté sont colorées de la même manière [voyez figures 154 et 155 où

Fig. 154.



Fig. 155.



l'on a représenté la marche dans un prisme positif (+) et dans un prisme négatif (—), des rayons réfractés rouges (r) et violet (v), ordinaires (o) et extraordinaires (e)]. En mesurant maintenant le minimum de déviation pour la partie moyenne des deux images, on en déduit les indices de réfraction des rayons ordinaires et des rayons extraordinaires de moyenne réfrangibilité.

Une double réfraction faible est facilement rendue sensible au moyen d'un prisme dont l'arête de réfringence est parallèle à l'axe optique, parce que la double réfraction répétée deux fois sur les faces inclinées augmente la divergence des rayons ordinaire et extraordinaire. Si à travers deux faces verticales d'un prisme de quartz naturel, lesquelles font un angle de 60°, on regarde un objet vertical délié (une aiguille) placé devant une fenêtre, la double réfraction de ce minéral est indiquée par les deux images de l'objet que l'on

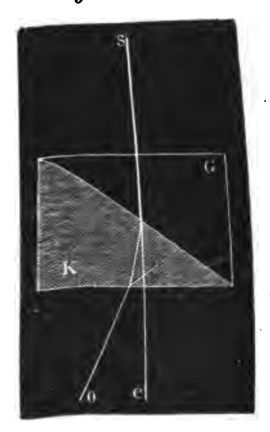
aperçoit et en en éteignant une des deux avec un polarisateur, comme l'autre est colorée absolument de la même manière qu'elle le paraîtrait, en la regardant à travers un prisme en verre, on peut en conclure que la réfrangibilité pour les rayons ordinaires et les rayons extraordinaires diminue de l'extrémité violette du spectre à l'extrémité rouge, comme c'est encore le cas pour les milieux simplement réfringents.

Prisme de spath achromatisé. Avec un ciment transparent (beaume de Canada) on a accolé à un prisme taillé comme nous venons de le dire, un prisme égal en verre dont l'indice est très-voisin de celui des rayons extraordinaires, et cela de manière que les arêtes de réfringence soient parallèles; on obtient ainsi un polarisateur très-utile pour plusieurs expériences. S'il tombe en effet sur le prisme de spath K (figure 156), et perpendiculairement, un faisceau de rayons parallèles, les rayons extraordinaires (*e*), en lesquels il se partage, traversent les trois milieux sans déviation sensible et, si la lumière incidente n'est pas homogène, sans dispersion apparente. Les rayons ordinaires au contraire, puisque leur indice est plus grand que celui du verre, sont déviés et dispersés. Si donc on n'emploie que la lumière qui traverse normalement le prisme de spath achromatique, on a un faisceau de rayons parallèles polarisés dont les vibrations sont parallèles à l'arête réfringente des prismes, et dont la composition chromatique est la même que celle de la lumière incidente. La même chose arrive si l'on tourne le prisme en verre du côté de la lumière incidente.

Fig. 156.



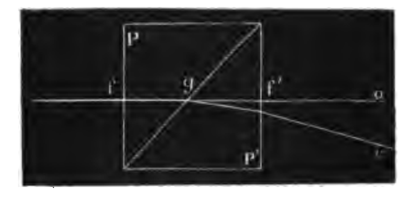
Fig. 157.



Micromètre de Rochon. — Rochon a ingénieusement réuni deux prismes

doublement réfringents pour en faire un appareil micrométrique. Les deux prismes P et P' (figure 158), sont taillés dans un quartz avec des angles réfringents égaux et accolés l'un à l'autre par deux faces, de manière que les autres faces soient parallèles deux à deux. Dans le prisme P, l'axe optique est perpendiculaire à f, dans P' il est parallèle à l'arête de réfringence. Si un rayon lumineux tombe perpendiculairement sur f il traverse le premier prisme sans être dévié ni dispersé. Mais, arrivé à la surface de séparation des deux prismes g, il est divisé en deux rayons. L'un est le rayon ordinaire qui suit la direction du rayon incident. Le second est réfracté extraordinairement : il est dévié de sa direction primitive dans un plan perpendiculaire à l'arête de réfringence. Il subit une déviation plus grande à son passage dans l'air par la face f'. Du double prisme sortent donc deux rayons polarisés dont un seul a conservé la direction du rayon incident. Il est facile de mesurer la déviation du second rayon. Elle dépend évidemment de la grandeur de l'angle réfringent. S'il a pour valeur 30°, 40°, 50°, 60°, on a respectivement pour valeur de la déviation : 19' 30'', 28' 20'', 40', 57' 40''.

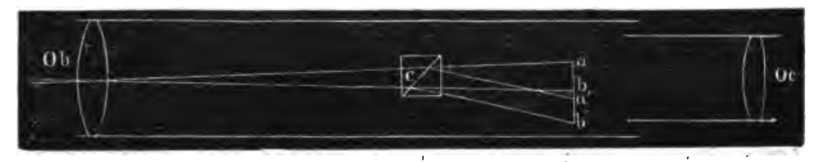
Fig. 158.



Dans le voisinage de l'incidence normale ces choses se passent d'une manière semblable, de telle sorte que le rayon incident par son passage à travers le prisme est chaque fois partagé en deux rayons dont l'un conserve la direction primitive, tandis que le second est toujours dévié dans un plan perpendiculaire à l'arête de réfringence et d'une quantité sensiblement constante.

Soit maintenant (figure 159) une lunette astronomique avec son objectif Ob

Fig. 159.



et son oculaire Oc. Si on la dirige vers un objet éloigné, on aura au foyer principal l'image ab. Plaçons maintenant en avant du foyer le double prisme de Rochon, on voit facilement que le rayon ca qui sert à former le point a de l'image, se divise en deux rayons ca et ca'. A côté de l'image a il y en a

une seconde a', car ce que nous avons dit de ca, peut se dire d'une manière approchée de tous les rayons qui concourent en a. A travers l'oculaire, nous verrons donc à côté de l'image ab qui coïncide avec celle qu'on aurait sans double prisme, une seconde image $a'b'$ égale à la première, mais qui en est écartée dans un plan perpendiculaire à l'arête de réfringence. La grandeur de la déviation est constante pour un double prisme donné : il dépend dès lors de la distance ac que les deux images se couvrent en partie, ou se touchent par leur bord ou soient plus ou moins écartées l'une de l'autre.

Soit D la déviation, ainsi $aca' = \mathrm{D}$, les deux images se toucheront évidemment par leurs bords b et a' si l'on a :

$$ac \text{ tang. D} = ab.$$

D'après cela le micromètre de Rochon permet de déterminer la distance d'un objet éloigné au moyen de sa grandeur connue et réciproquement sa grandeur au moyen de son éloignement connu.

En effet soit AB la distance de deux points de l'objet et E sa distance à l'observateur. On dirige la lunette de manière que les quatre images a, b, a', b' des deux points soient en ligne droite, et ensuite on déplace le double prisme le long de l'axe de la lunette jusqu'à ce que b coïncide avec a'. Dans ce cas soit d la distance du milieu du double prisme au foyer principal et e la distance de ce dernier à l'objectif : alors

$$d \text{ tang. D} = ab \text{ et}$$

$$ab : \mathrm{AB} = e : \mathrm{E} \qquad \text{d'où } \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{E}} = \frac{d}{e} \text{ tang. D}$$

et cette formule exprime la dimension AB et la distance E ensemble, au moyen des quantités D et e à déterminer une fois pour toutes et de la grandeur d qu'il faudra mesurer chaque fois.

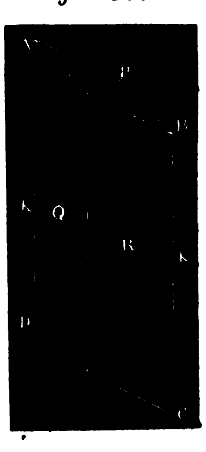
Pour l'usage du micromètre de Rochon, le déplacement du double prisme se fait au moyen d'une crémaillière et d'une vis, et le rapport $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{E}}$ se lit immédiatement sur une échelle.

Arago s'est servi du micromètre de Rochon pour mesurer le diamètre des planètes ; mais alors le double prisme était placé devant l'oculaire. Voyez pour plus de détails : *Oculaire micrométrique doublement réfringent d'Arago :* Annales de Poggendorff, LXXI.

Prisme de Nicol. — Un des instruments d'optique les plus importants est le polarisateur imaginé par l'Anglais Nicol, et qu'on appelle prisme de Nicol ; c'est également une combinaison de deux prismes doublement réfringents. Il est construit de la manière suivante.

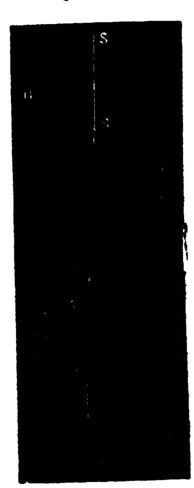
Soient P, Q, R (figure 160), les faces naturelles d'un rhomboèdre, B et D ses sommets. La face P et la diagonale AB font avec l'arête K un angle d'environ 71°. On taille d'abord à la place des faces P une paire de faces qui, comme celles-ci, sont perpendiculaires au plan ABCD, mais font avec les arêtes K un angle de 68°. Ensuite le cristal est coupé en deux par un plan perpendiculaire à ABCD et aux deux faces taillées. Les plans de section sont polis et enfin les deux morceaux sont réunis et collés dans leur position primitive avec du baume de Canada. Si maintenant on laisse arriver sur un prisme de Nicol ainsi construit, un rayon lumineux dans la direction de son axe, ou de l'arête K, ou dans une direction qui s'en écarte peu, il sera, à sa sortie et sans être dévié, polarisé perpendiculairement au plan ABCD, à la section principale du prisme. La cause en est facile à saisir.

Fig. 160.



Imaginons qu'on mène par le rayon lumineux un plan parallèle à la section principale : il coupe le prisme suivant *abcd* (figure 161), soit *gf* sa section avec la surface du baume de manière que *gf* est perpendiculaire sur *ab* et sur *cd*. Le rayon lumineux à son entrée dans le cristal est divisé en un rayon ordinaire et un rayon extraordinaire tous deux dans le plan *abcd*. Le rayon ordinaire *so* est le plus dévié de la section *ss*, il traverse la première portion du prisme jusqu'en *o* et éprouve là la réflexion totale. L'indice de réfraction du baume de Canada est en effet 1,536, celui du rayon ordinaire dans le spath est 1,654. Pour les vibrations de ce dernier le baume est donc moins réfringent que le spath calcaire : il peut donc y avoir réflexion totale au passage de la lumière de celui-ci dans celui-là ; et c'est ce qui arrivera aussitôt que l'incidence aura lieu sous un angle de 68° environ ou plus grand. Mais l'incidence du rayon ordinaire atteint cette valeur, tant que le rayon incident ne s'écarte pas trop de l'axe du prisme dans certaines limites. Si *ss* est juste parallèle à l'axe du prisme, l'incidence est de 75°,5. Le rayon réfracté ordinaire ne traverse donc pas la couche de baume ; il est réfléchi vers les parois du premier morceau de cristal et est éteint par ces parois que l'on recouvre d'un enduit noir.

Fig. 161.



L'indice de réfraction des ondes extraordinaires est en général compris entre 1,483 et 1,654. Si donc le rayon incident ne s'éloigne pas au delà de certaines limites de la direction de l'axe du prisme, les ondes extraordinaires ont un indice moindre que celui du baume, en sorte que ce dernier est plus refringent que le spath. Le rayon extraordinaire traverse la couche de baume, et pénètre dans le second morceau du cristal. Comme le baume par sa faible épaisseur n'occasionne aucune déviation sensible, ce rayon suit la même direction que dans la première moitié et reprend à sa sortie, par la face *cd*, la direction du rayon incident.

Il est facile de déterminer les limites autour de l'axe du prisme dans lesquelles doit se trouver le rayon incident pour que les rayons extraordinaires puissent sortir du prisme. On trouvera que le prisme de Nicol donne un champ d'environ 27° dont la lumière est polarisée perpendiculairement à la section principale et dont l'axe se confond sensiblement avec celui du prisme. Voyez *Annales de Pogg.* L, sur un perfectionnement apporté par Radicke dans la construction du prisme de Nicol.

CHAPITRE VII.

Lois de la dispersion dans les milieux à un axe.

Quant aux lois de la dispersion dans les milieux cristallisés, nous ne pourrions espérer obtenir quelque chose des données théoriques précédentes qu'autant que nous pourrions appliquer les approximations qui nous ont seules permis de jeter un coup d'œil sur l'ensemble des phénomènes de la double réfraction; aussi, pour résoudre la question qui nous occupe, il faut revenir à l'équation générale de l'ellipsoïde de polarisation de Cauchy (Page 170).

En général les vitesses des différentes sortes de lumières colorées seront dans des rapports différents suivant la direction des ondes. Pour déterminer ces rapports on rencontrera de grandes difficultés : en outre on manque des observations nécessaires pour vérifier les résultats du calcul. Toutefois, pour le

cas particulier où l'onde plane est parallèle à l'axe optique, le calcul est fort simple, et les expériences ont pu le vérifier.

Supposons l'axe des z d'un système de coordonnées rectangulaires, parallèle à l'axe optique ; à cause de la nature des milieux qui nous occupent, pour chaque plan parallèle à l'axe des z les mêmes propriétés doivent se présenter, et dès lors pour plus de simplicité prenons un pareil plan pour plan des yz ; alors $\Delta E = \Delta x$ et les coefficients P, Q, R de l'ellipsoïde de polarisation se changent en :

$$-2\,\Sigma m\,\varphi\,\frac{\Delta y\,\Delta z}{\Delta r^3}\left[\frac{\pi}{\lambda}\Delta x-\frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right)^3+\ldots\right]^2,$$

$$-2\,\Sigma m\,\varphi\,\frac{\Delta x\,\Delta z}{\Delta r^3}\left[\frac{\pi}{\lambda}\Delta x-\frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right)^3+\ldots\right]^2,$$

$$-2\,\Sigma m\,\varphi\,\frac{\Delta x\,\Delta y}{\Delta r^3}\left[\frac{\pi}{\lambda}\Delta x-\frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right)^3+\ldots\right]^2,$$

ceux-ci consistent en termes de la forme $a\,(\Delta x)^\alpha\,(\Delta y)^\beta\,(\Delta z)^\gamma$ dans lesquels chaque fois au moins un des exposants α, β, γ est un nombre impair. Ils se détruisent par conséquent tous (voyez pag. 189), et l'équation de l'ellipsoïde de polarisation devient :

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 1.$$

Les axes de cette surface se confondent comme on pouvait s'y attendre avec les axes coordonnés. Pour les carrés des demi-axes coïncidant avec l'axe des z et des y nous trouvons $\frac{1}{N}$ et $\frac{1}{M}$. D'après cela les vitesses o et e des vibrations respectivement parallèles à l'axe des y, c'est-à-dire, perpendiculaires à l'axe optique, et parallèles à l'axe optique, c'est-à-dire, à l'axe des z, sont données par les équations suivantes :

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}o\right)^2 = M, \qquad \left(\frac{2\pi}{\lambda}e\right)^2 = N,$$

ou :

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}o\right)^2 = \Sigma\,2m\left(\frac{f}{\Delta r}+\frac{\Delta y^2\varphi}{\Delta r^3}\right)\text{Sin.}\,\frac{\pi}{\lambda}\,\Delta x^2,$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}e\right)^2 = \Sigma\,2m\left(\frac{f}{\Delta r}+\frac{\Delta z^2\varphi}{\Delta r^3}\right)\text{Sin.}\,\frac{\pi}{\lambda}\,\Delta x^2.$$

Elles s'accordent tout à fait, quant à la forme, avec celle que nous avons

obtenue, page 174, pour la vitesse de la lumière dans les milieux isotropes, et dès lors la loi de la dispersion pour les ondes ordinaires et pour les ondes extraordinaires parallèles à l'axe optique est la même que dans les milieux isotropes; toutefois les constantes qui entrent dans son expression sont différentes pour les deux ondes à cause des propriétés différentes de l'axe des y et de celui des z. La loi de la dispersion dans un milieu à un axe s'exprime donc aussi, suivant M. Cauchy, par les formules :

$$\omega = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{\Lambda^2}, \quad \varepsilon = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{\Lambda^2},$$

et suivant Baden-Powell, par :

$$\frac{1}{\omega} = C \frac{\text{Sin.}\,\frac{D}{\Lambda}}{\frac{D}{\Lambda}}, \quad \frac{1}{\varepsilon} = E \frac{\text{Sin.}\,\frac{F}{\Lambda}}{\frac{F}{\Lambda}}.$$

Les mesures de Rudberg (page 242) nous fournissent des données suffisantes pour vérifier ces formules. Pour employer, par exemple, celle de M. Cauchy, nous formerons la séric des différences $\omega_h - \omega_g$, etc., $\varepsilon_h - \varepsilon_g$ etc. Elles devront être entre elles comme les nombres 77, etc. (page 177) : la table ci-dessous montre qu'en effet cela a lieu avec un accord satisfaisant. Des deux lignes horizontales de chaque tableau, la première contient les différences $\mu_h - \mu_g$, etc., multipliées par 100,000 : si l'on multiplie les nombres de la première série par 77 et qu'on divise chaque fois le produit par le 1er terme de la série, en ne prenant que la partie entière du quotient, on obtient les termes de la seconde ligne. Ces termes sont approximativement entre eux comme $\mu_h - \mu_g$, etc., et ne diffèrent que très-peu des termes de la série que nous mettons en tête pour comparer et qui de leur côté sont sensiblement entre eux comme $\frac{1}{\Lambda_h^2} - \frac{1}{\Lambda_g^2}$, etc. La différence ne porte que sur quelques unités et n'atteint jamais les dizaines.

$\frac{1}{\Lambda_h^2} - \frac{1}{\Lambda_g^2}$	$\frac{1}{\Lambda_g^2} - \frac{1}{\Lambda_f^2}$	$\frac{1}{\Lambda_f^2} - \frac{1}{\Lambda_e^2}$	$\frac{1}{\Lambda_e^2} - \frac{1}{\Lambda_d^2}$	$\frac{1}{\Lambda_d^2} - \frac{1}{\Lambda_c^2}$	$\frac{1}{\Lambda_c^2} - \frac{1}{\Lambda_b^2}$
77	86	47	54	41	15

1. Spath calcaire.

$\omega_h - \omega_g$	$\omega_g - \omega_f$	$\omega_f - \omega_e$	$\omega_e - \omega_d$	$\omega_d - \omega_c$	$\omega_c - \omega_b$
713	815	442	510	398	144
77	88	47	55	42	15

$\varepsilon_h - \varepsilon_g$	$\varepsilon_g - \varepsilon_f$	$\varepsilon_f - \varepsilon_e$	$\varepsilon_e - \varepsilon_d$	$\varepsilon_d - \varepsilon_c$	$\varepsilon_c - \varepsilon_b$
327	378	207	233	180	64
77	89	48	54	42	15

2. Cristal de roche.

$\omega_h - \omega_g$	$\omega_g - \omega_f$	$\omega_f - \omega_e$	$\omega_e - \omega_d$	$\omega_d - \omega_c$	$\omega_c - \omega_b$
392	460	254	293	237	91
77	90	49	57	46	17

$\varepsilon_h - \varepsilon_g$	$\varepsilon_g - \varepsilon_f$	$\varepsilon_f - \varepsilon_e$	$\varepsilon_e - \varepsilon_d$	$\varepsilon_d - \varepsilon_c$	$\varepsilon_c - \varepsilon_b$
407	471	263	303	243	95
77	89	49	57	45	17

Nous terminerons l'étude des cristaux hexagonaux et tétragonaux en rapportant les données qu'ils ont fournies jusqu'à présent à l'observation. Le caractère de leur double réfraction a été reconnu surtout par des phénomènes d'interférence qu'ils produisent avec la lumière polarisée. Pour que tout soit complet, nous donnerons ces résultats, bien que la théorie de ces phénomènes dépasse les limites de cet ouvrage.

Nous représenterons par μ l'indice de réfraction moyen, abstraction faite de toute double réfraction et dispersion, par ω l'indice de réfraction des rayons ordinaires de réfrangibilité moyenne, et par ε l'indice de réfraction principal des rayons extraordinaires.

A. CRISTAUX TÉTRAGONAUX.

1) CRISTAUX A DOUBLE RÉFRACTION POSITIVE.

Acétate double de chaux et de cuivre.

Apophyllite. — Herschel distingue trois variétés de ce minéral au point de vue optique. La *première variété* change le caractère de sa double réfraction en allant d'une extrémité du spectre à l'autre, tandis qu'elle est simplement réfringente pour la partie colorée en indigo. La *seconde variété* se comporte de même, mais c'est pour le jaune qu'a lieu le passage de la réfraction positive à la négative (1). Enfin la *troisième variété*, le *leucocyclite* est doublement réfringente, positivement pour tous les rayons. Pour celle-ci $\mu = 1,5431$ (He.). Les deux premières variétés sont très-rares : le *leucocyclite* se rencontre dans le Tyrol.

Rudberg fait la remarque que les deux variétés d'apophyllite venant de Utön réfractent doublement de la même manière tous les rayons. (*Ann. de Pogg.*, XXXV.)

Oxyde d'étain.

Rutile.

Tungstate de chaux $\omega = 1,970$; $\varepsilon = 2,129$. Br.

Zirkon. $\mu = 1,95$. W. — $\omega = 1,961$; $\varepsilon = 2,015$. Br.

(1) Si l'on fait cristalliser l'hyposulfate de strontiane avec une quantité de plus en plus grande d'hyposulfate isomorphe de plomb, la double réfraction à un axe du premier diminue de plus en plus, et enfin quand la quantité du second sel est dominante, la réfraction prend le caractère opposé. Entre certaines limites du mélange les cristaux sont monoréfringents pour les rayons moyens, et doublement réfringents, mais en sens contraire, pour les deux extrémités du spectre (*Sénarmont, Comptes rendus*. Oct. 1851).

2) CRISTAUX A DOUBLE RÉFRACTION NÉGATIVE.

Anatase $\mu = 2{,}500$. Br. — $\omega = 2{,}554$; $\varepsilon = 2{,}493$. Miller. *Ann. Pogg.* LVII.

Arséniate de potasse. $\mu = 1{,}535$. W.

Bi-arséniate d'ammoniaque. $\omega = 1{,}579 - 1{,}576$, $\varepsilon = 1{,}525 - 1{,}523$. Sén. (1).

Bi-arséniate de potasse. $\omega = 1{,}596 - 1{,}587$, $\varepsilon = 1{,}538 - 1{,}534$. Sén.

Bi-phosphate d'ammoniaque $\omega = 1{,}512 - 1{,}519$, $\varepsilon = 1{,}477 - 1{,}476$. Sén.

Bi-phosphate de potasse. $\omega = 1{,}510 - 1{,}505$, $\varepsilon = 1{,}477 - 1{,}476$. Sén.

Chalkolithe.

Chlorure de cuivre et d'ammoniaque. $\omega = 1{,}744$, $\varepsilon = 1{,}724$. Sén.

Chlorure de cuivre et de potasse. — La force doublement réfringente est presque la même que celle du chlorure isomorphe de cuivre et d'ammoniaque. Sén.

Cyanure de mercure.

Edingtonite.

Ferrocyanure de potassium.

Mellite. $\mu = 1{,}556$, $= 1{,}538$. Br.

Molybdate de plomb.

Phosphate ammoniaco-magnésien.

Sous-phosphate de potasse.

Skapolithe. $\mu = 1{,}606$. Br.

Sommervillite.

Sulfate de nickel.

Sulfate de nickel et de cuivre.

Vesuviane (Idocrase). — D'après les recherches que cite Herschel dans son optique, § 1125, on calcule pour $\mu = 1{,}530$.

Pour le *proto-chlorure de mercure* tétragonal dont le caractère doublement réfringent est inconnu, Brewster a trouvé $\mu = 1{,}970$.

B. CRISTAUX HEXAGONAUX.

1) CRISTAUX POSITIFS.

Améthyste. $\mu = 1{,}562$. W.

Argent rouge. $\mu = 2{,}564$. Br.

(1) Les données de M. de Sénarmont sont prises dans ses « *Recherches sur les propriétés optiques bi-réfringentes des corps isomorphes.* » Ann. de Chim. et de Phys. Déc. 1851.

Cristal de roche. μ = 1,563 (P. spéc. 2,65). N. — μ = 1,568, = 1,575. C. — μ = 1,562. Br.

Dans une plaque taillée perpendiculairement à l'axe, M. Jamin trouva une réflexion positive, et en déduisit μ = 1,530. — Voyez 1re partie, page 98 et 2e partie, page 242.

Dioptase. Miller donne ω = 1,667, ε = 1,723. *Ann. de Pogg.* LVII, contradictoirement Brewster signale la dioptase comme négative.

Glace. μ = 1,310. W. — μ = 1,307, = 1,3085. Br. — M. A.

M. Bravais a déterminé comme il suit les indices de réfraction moyenne des différentes couleurs avec une erreur possible de 0,0009 : (*Mémoire sur les halos*).

Milieu de la partie	rouge	du spectre	μ = 1,307
»	orangé	»	1,3085
»	jaune	»	1,3095
»	vert	»	1,3115
»	bleu	»	1,315
»	violet	»	1,317

Hyposulfate de plomb. Sén.

Hydrate de magnésie.

Sulfate de potasse ω = 1,493, ε = 1,501, — 1,502. Sin.

2) CRISTAUX NÉGATIFS.

Alunite.

Apatite. μ = 1,657. Br.

Arséniate de cuivre.

Arséniate de plomb.

Azotate de soude. — Présente une forte double réfraction — μ = 1,481. Mx.

Bérile. μ = 1,598. Br. — Perpendiculairement à l'axe. Réflexion positive, μ = 1,560 J*.

Calamine.

Chlorophosphate de plomb.

Chlorure de calcium. μ = 1,425 = 1,440. Br.

Chlorure de strontium.

Cinabre.

Corindon.

Dolomie

Emeraude. μ = 1,585. Br.

Hyposulfate de chaux. — Pour le rouge moyen $\mu = 1,5611$; pour le jaune verdâtre moyen $\mu = 1,566$. He.

Hyposulfate de strontiane. Sén.

Lévyne.

Mica (1) du Vésuve et de Kariat.

Néphéline.

Rubellite. $\mu = 1,768$. He. — $\mu = 1,779$ Br.

Rubis. $\mu = 1,779$ Br.

Saphir. S. bleu $\mu = 1,794$. Br. — S. blanc $\mu = 1,768$. W.

Spath calcaire $\omega = 1,6543$ $\epsilon = 1,4833$. Mal. — Perpendiculairement à l'axe, réflexion positive $\mu = 1,675$ J*. Voyez page 242.

Tourmaline. $\mu = 1,668$. Br. Tourm. blanche $\omega = 1,6366$, $\epsilon = 1,6193$. Miller. *Ann. Pogg.* LVII. — Perpendiculairement à l'axe. Réflexion positive. $\mu = 1,645$. J*.

Quant aux anomalies que quelques cristaux hexagonaux et tétragonaux offrent relativement aux lois générales optiques, voyez entre autres :

Optique d'Herschell, 1130. *Optique de Brewster,* 147. *Moigno, Rép. d'opt. mod.*, p. 357 et suiv.

CHAPITRE VIII.

Cristaux sans axe principal. Systèmes isoklinique, monoklinique et triklinique.

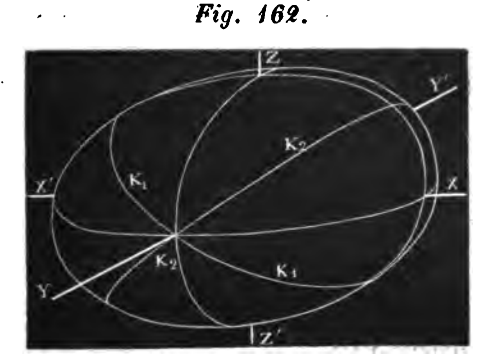
La double réfraction dans le cas d'un axe optique se reconnaît à la forme cristalline, aux propriétés dues à la cohésion, et enfin à l'existence d'un axe principal. Le caractère de l'axe principal consiste en ce que dans les formes tétragonales, chaque couple de plans perpendiculaires entre eux menés par cet axe, dans les formes hexagonales, chaque ensemble de trois plans également inclinés l'un sur l'autre passant par cet axe, partage le milieu cristallin en

(1) Voyez dans la liste des cristaux à deux axes ce que l'on dit du mica.

deux ou en trois portions identiques, comme aussi ces systèmes de plans peuvent être tournés autour de l'axe principal. On chercherait en vain une pareille direction dans les systèmes isoklinique, monoklinique et triklinique : mais dans le premier il y a trois plans de symétrie différents entre eux, et dans le second il n'y en a qu'un seul. Les normales à ces plans, les axes de symétrie, se confondent avec les axes cristallins. D'après cela, pour l'explication de leurs propriétés optiques, l'ellipsoïde E dans ces systèmes sera un ellipsoïde général avec trois axes inégaux, et pour chaque couleur nous ferons coïncider ceux-ci avec les axes de symétrie là où ces derniers existeront, mais nous abandonnerons toute détermination plus complète à des recherches ultérieures. De cette manière nous arrivons à exposer les faits naturels avec une certaine exactitude et par des considérations basées sur la théorie quant à la question essentielle.

Dans l'équation $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$ de l'ellipsoïde E (figure 162), qui sera le point de départ de ce qui suit, supposons donc $a < b < c$: nous pourrons toujours y arriver par le choix convenable des axes coordonnés. Puisque les sections diamétrales de l'ellipsoïde sont en général des ellipses, nous obtiendrons, d'après la construction développée à la page 199, pour un plan donné deux ondes qui lui seront parallèles, à vibrations de *direction déterminée* et ayant des vitesses *différentes*. La plus grande valeur que celles-ci puissent atteindre est évidemment c, la plus petite a; nous désignerons par b la vitesse moyenne. Ces vitesses correspondent à une onde, aussitôt que cette onde et la direction de ses vibrations seront parallèles à l'axe des z, à l'axe des x, à l'axe des y.

Fig. 162.



Mais dans deux positions particulières du plan, les directions des vibrations correspondantes sont *indéterminées* et alors les ondes parallèles quelle que soit leur polarisation ont une seule et même vitesse ; cela a lieu quand le plan est parallèle à une section circulaire de l'ellipsoïde. L'ellipsoïde E est coupé suivant un cercle par deux plans diamétraux k_1 et k_2 et on nomme ces cercles les *sections circulaires*. Ces plans passent par l'axe moyen $\frac{2}{b}$ et sont égale-

ment inclinés sur les sections principales yz et xy, et perpendiculaires à la 3e section principale xz : le rayon de la section circulaire est ainsi $\frac{1}{b}$. Représentons respectivement par X_1, Z_1 et X_2, Z_2 les angles entre les normales des sections circulaires et les axes des x et des z dans les plans desquels elles se trouvent, on aura comme on peut facilement le trouver :

$$\text{Cos. } X_1 = + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad \text{Cos. } Z_2 = + \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

$$\text{Cos. } X_2 = - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad \text{Cos. } Z_2 = + \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Ainsi donc, parallèlement aux sections circulaires ainsi déterminées, dont le demi-diamètre est $\frac{1}{b}$, chaque onde plane se propage avec la vitesse constante b, quelle que soit la direction de ses vibrations. Les normales aux deux sections circulaires jouent ici le même rôle que l'axe optique des cristaux tétragonaux et hexagonaux ; pour cette raison on les appelle encore *axes optiques* et les cristaux que nous considérons ici seront appelés *cristaux à deux axes optiques* par opposition aux cristaux à un seul.

Dans les milieux à un axe nous avons trouvé les propriétés du mouvement dans les ondes planes parfaitement déterminées, aussitôt que la position des ondes était donnée par rapport à l'axe optique, et pour tous les plans dont l'inclinaison sur cet axe était la même, le mouvement se présentait le même. Ici aussi le mouvement des ondes se détermine par des considérations simples, quand la position de leur plan est donnée par rapport aux axes optiques, et en valeur absolue, on trouve aussi le même mouvement pour tous les plans qui font les mêmes angles avec les deux axes optiques. Il y a évidemment en général quatre pareils plans et à chacun d'eux correspondent seulement deux mouvements qui ne diffèrent que parce qu'ils se propagent suivant des directions opposées.

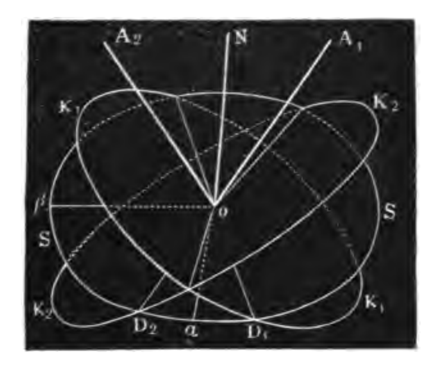
Nous allons maintenant chercher à trouver les relations indiquées.

Soit O (figure 163), le centre de l'ellipsoïde, ON la normale à un plan donné. Perpendiculairement à ON menons un plan diamétral qui coupe l'ellipsoïde suivant l'ellipse SS. Soient Oα, Oβ les demi-axes de cette section ; alors les plans NOα, NOβ sont les plans d'oscillation des ondes qui peuvent se propager en restant perpendiculaires à ON dans le milieu cristallisé. Mais si en outre K_1 et K_2 sont les sections circulaires de l'ellipsoïde et OD_1, OD_2 les intersections de ces sections circulaires avec le plan diamétral SS, on a :

$$OD_1 = OD_2 = \frac{1}{b}.$$

Or deux diamètres égaux d'une ellipse sont également inclinés sur les deux axes, par suite $O\alpha$ est la bissectrice de l'angle aigu, $O\beta$ celle de l'angle obtus que font entre elles les intersections OD_1 et OD_2.

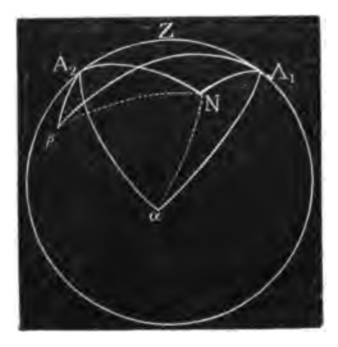
Fig. 163.



Les plans d'oscillation $NO\alpha$, $NO\beta$, partagent donc aussi par moitié les angles formés par deux plans menés par le point O perpendiculairement à OD_1 et à OD_2. De ces plans, l'un, celui qui est perpendiculaire à OD_1 et par conséquent aussi aux plans SS et K_1 passe par ON la normale à SS et par OA_1 la normale à la section circulaire K_1, un des axes optiques. Le plan qui est perpendiculaire à OD_2 et partant à K_2 et à SS contient outre ON, encore la normale OA_2 à la section circulaire K_2, le second axe optique. Il résulte de là la proposition remarquable suivante :

Si par la normale à un plan et par chacun des axes optiques on mène un plan, les plans bissecteurs des angles dièdres ainsi formés sont les plans d'oscillations des deux groupes d'ondes qui peuvent se propager dans le cristal, parallèlement au premier plan.

Fig. 164.



Pour exprimer analytiquement la vitesse des ondes planes, ce qui est la seconde question, nous procéderons comme il suit :

Décrivons autour du centre O de l'ellipsoïde E une sphère de rayon 1, et soient A_1 et A_2 (Fig. 164), ses points d'intersection avec les axes optiques. Soit N la rencontre d'une normale à l'onde avec la surface sphérique. Joignons N à A_1, et A_2 par des arcs de grand cercle et partageons en deux parties égales les angles sphériques ainsi formés. Soient $N\alpha$ et $N\beta$ les arcs bissecteurs ; alors les plans de ces derniers sont les plans d'oscil-

lation des ondes perpendiculaires à ON. Si nous supposons que $N\alpha$ et $N\beta$ soient égaux à un cadran, évidemment α et β sont les extrémités des deux diamètres qui se confondent avec les axes de la section diamétrale de E perpendiculaire à ON. Ce que nous avons à faire maintenant est d'exprimer l'inclinaison de ces axes sur les axes optiques, en fonction des constantes du milieu et des angles que la normale fait avec les axes optiques. Ceux-ci doivent être regardés comme des angles donnés :

$$NA_1 = \varphi_1 \qquad NA_2 = \varphi_2$$

les angles cherchés sont :

$$\alpha A_1 = \psi_1, \qquad \alpha A_2 = \psi_2.$$
$$\beta A_1 = \psi_1' \qquad \beta A_2 = \psi_2'.$$

Soient enfin aussi $A_1NA_2 = \delta$, et par suite $\alpha NA_1 = \alpha NA_2 = 180° - \frac{1}{2}\delta$.

Le triangle sphérique αNA_1 donne la relation :

$$\text{Cos.}\ \psi_1 = -\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\delta\ \text{Sin.}\ \varphi_1\ ;$$

et le triangle αNA_2 :

$$\text{Cos.}\ \psi_2 = -\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\delta\ \text{Sin.}\ \varphi_2.$$

De même on tire des triangles βNA_1 et βNA_2 :

$$\text{Cos.}\ \psi_1' = -\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\delta\ \text{Sin.}\ \varphi_1, \qquad \text{Cos.}\ \psi_2' = \text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\delta\ \text{Sin}\ \varphi_2.$$

Mais dans le triangle NA_1A_2 on a :

$$\text{Cos.}\ \delta = \frac{\text{Cos.}\ A_1A_2 - \text{Cos.}\ \varphi_1\ \text{Cos.}\ \varphi_2}{\text{Sin.}\ \varphi_1\ \text{Sin.}\ \varphi_2}$$

ou en désignant par 2Z l'angle des axes optiques :

$$\text{Cos.}\ \delta = \frac{\text{Cos.}\ 2Z - \text{Cos.}\ \varphi_1\ \text{Cos.}\ \varphi_2}{\text{Sin.}\ \varphi_1\ \text{Sin.}\ \varphi_2}$$

Il en résulte :

$$1 - \text{Cos.}\ \delta = 2\ \text{Sin.}^2\ \tfrac{1}{2}\delta = \frac{\text{Cos.}\ (\varphi_1 - \varphi_2) - \text{Cos.}\ 2Z}{\text{Sin.}\ \varphi_1\ \text{Sin.}\ \varphi_2}$$

et

$$1 + \text{Cos.}\ \delta = 2.\ \text{Cos.}^2\ \tfrac{1}{2}\delta = \frac{\text{Cos.}\ 2Z - \text{Cos.}\ (\varphi_1 + \varphi_2)}{\text{Sin.}\ \varphi_1\ \text{Sin.}\ \varphi_2}.$$

En transportant dans les formules pour Cos. ψ_1, etc. les valeurs qu'on tirerait de là pour Sin. $\frac{1}{2}\delta$, Cos. $\frac{1}{2}\delta$, on exprimerait, comme on le cherche, les angles ψ_1 etc. en fonction de Z et φ_1 etc. Quand donc on aura trouvé la position des axes $O\alpha$, $O\beta$ il restera à en déduire ainsi que de l'équation de l'ellipsoïde E leurs longueurs. Mais soient u, v, w les cosinus des angles

qu'un rayon r de cette surface fait avec les axes coordonnés, on a pour les coordonnées de son extrémité :

$$x = \mathrm{u}r \qquad y = \mathrm{v}r \qquad z = \mathrm{w}r.$$

Et ces valeurs portées dans l'équation de l'ellipsoïde, donnent :

$r^2 (a^2 \mathrm{u}^2 + b^2 \mathrm{v}^2 + c^2 \mathrm{w}^2) = 1$, ou bien, puisque $\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2 = 1$,

$$r^2 [(a^2 - b^2) \mathrm{u}^2 + (c^2 - b^2) \mathrm{w}^2 + b^2] = 1.$$

Maintenant ψ_1 et ψ_2 étant les angles que le rayon r fait avec les axes optiques, il est facile de voir qu'on a :

$$\text{Cos. } \psi_1 = \mathrm{u} \text{ Cos X} + \mathrm{w} \text{ Cos. Z}, \quad \text{Cos. } \psi_2 = - \mathrm{u} \text{ Cos. X} + \mathrm{w} \text{ Cos. Z},$$

d'où :

$$\mathrm{u} = \frac{\text{Cos. } \psi_1 - \text{Cos. } \psi_2}{2 \text{ Cos. X}}, \qquad \mathrm{w} = \frac{\text{Cos. } \psi_1 + \text{Cos. } \psi_2}{2 \text{ Cos. Z}}.$$

La dernière équation trouvée de l'ellipsoïde peut s'écrire aussi comme il suit :

$$r^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{4 \text{ Cos.}^2 \text{X}} (\text{Cos.} \psi_1 - \text{Cos.} \psi_2)^2 + \frac{c^2 - b^2}{4 \text{ Cos.}^2 \text{Z}} (\text{Cos.} \psi_1 + \text{Cos.} \psi_2)^2 + b^2 \right) = 1,$$

d'où, en mettant pour Cos. X et Cos. Z les valeurs données à la page 257,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a^2 - c^2}{4} [(\text{Cos. } \psi_1 - \text{Cos. } \psi_2)^2 - (\text{Cos. } \psi_1 + \text{Cos. } \psi_2)^2] + b^2$$

$$= b^2 - (a^2 - c^2) \text{ Cos. } \psi_1 \text{ Cos. } \psi_2.$$

Enfin cette équation nous donne la longueur r_α du demi-axe, si à la place de Cos. ψ_1 et Cos. ψ_2 on met les valeurs de ces grandeurs trouvées pour $O\alpha$ en fonction de Z, φ_1 et φ_2. On trouve :

$$\frac{1}{r_\alpha^2} = b^2 - \frac{a^2 - c^2}{2} [\text{Cos. } 2\text{Z} - \text{Cos. } (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

et puisqu'on a :

$$\text{Cos. } 2 \text{ Z} = \text{Cos.}^2 \text{ Z} - \text{Sin.}^2 \text{ Z} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = \frac{2 b^2 - a^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

alors :

$$\frac{1}{r_\alpha^2} = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \text{ Cos. } (\varphi_1 + \varphi_2).$$

En mettant dans l'équation dernière de l'ellipsoïde à la place de Cos. ψ_1 et Cos. ψ_2, les valeurs trouvées relatives à $O\beta$, de Cos. ψ_1' et Cos. ψ_2', on obtient la longueur r_β de ce demi-axe.

$$\frac{1}{r_\beta^2} = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \text{ Cos. } (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Mais les valeurs réciproques des demi-axes r_α et r_β mesurent les vitesses

des ondes planes dont la normale est ON et dont les vibrations sont parallèles à ces demi-axes. Représentons alors ces vitesses respectives par v_α et v_β, elles seront :

$$v_\alpha{}^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \text{Cos.} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$v_\beta{}^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \text{Cos.} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Ces deux équations, données pour la première fois par Fresnel, et la proposition de la page 258, renferment toutes les lois du mouvement des ondes planes dans les milieux à deux axes, comme le font l'équation de la page 219 et les propositions qui l'accompagnent pour les milieux à un seul axe. Dans ceux-là les deux ondes correspondantes à un plan changent toutes deux de direction de vibration et de vitesse, suivant la position du plan, tandis que dans les milieux à un axe l'une d'elles reste avec la même vitesse et ses vibrations se propagent en demeurant toujours perpendiculaires à l'axe principal, etc. Pour nous faire une idée plus nette des différents phénomènes du cas actuel, nous ferons les remarques suivantes :

Des deux ondes qui correspondent à la même direction de propagation déterminée par les angles φ_1 et φ_2, l'une a toujours une vitesse qui sera exprimée par la valeur de v_α. Toutes ces ondes correspondantes à v_α peuvent se réunir en un groupe que nous nommerons ondes de la *première espèce*. La plus grande valeur que $\varphi_1 + \varphi_2$ puisse atteindre est évidemment 180° ; cela arrivera si la direction de la propagation, ou la normale, tombe dans le plan des xy et alors pour v_α on a la valeur c, c'est-à-dire, la plus grande qu'en général puisse prendre la vitesse. La somme $\varphi_1 + \varphi_2$ atteint une valeur minimum si la normale tombe dans l'angle des axes optiques qui est partagé en deux par l'axe des z ; ce minimum est 2Z et la valeur b lui correspond pour v_α. La vitesse d'une onde de la première espèce est donc comprise entre b et c.

Une normale qui fait avec l'axe OA_2 l'angle φ_2, forme avec son prolongement l'angle $180 - \varphi_2$. Rapportons à OA_1 et OA_2' une normale déterminée par φ_1 et φ_2, et représentons par φ_1' et φ_2' ses inclinaisons sur ces directions, on a $\varphi_1' = \varphi_1$ et $\varphi_2' = 180 - \varphi_2$ et pour $v_\beta{}^2$ on obtient :

$$v_\beta{}^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2} \text{Cos.} (\varphi_1' + \varphi_2').$$

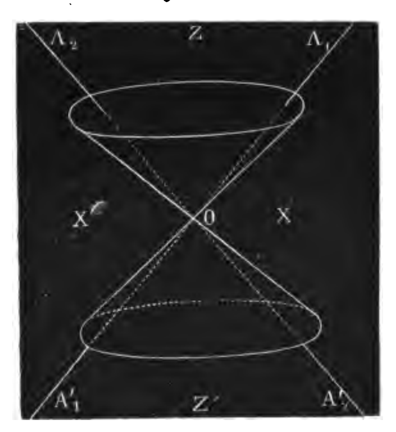
Maintenant toutes les ondes dont la vitesse est exprimée par v_β, nous les regarderons comme de la *seconde espèce* par opposition à celles de la première ; de sorte qu'à chaque direction déterminée d'une part par φ_1 et φ_2, de l'autre par φ_1' et φ_2' correspondent toujours une onde de la première espèce et une

onde de la seconde. La plus grande valeur que puisse prendre $\varphi_1' + \varphi_2'$ est 180° ; elle est atteinte si la normale tombe dans le plan des yz et la valeur correspondante est a, la plus petite valeur que puisse avoir la vitesse. La somme $\varphi_1' + \varphi_2'$ atteint le minimum 2 X si la normale tombe dans l'angle des axes optiques dont l'axe des x est la bissectrice ; alors v_β est un maximum et égal à b.

D'après cela, pendant que les ondes de la première espèce possèdent une vitesse comprise entre la plus grande possible c et la moyenne b, la vitesse des ondes de la seconde espèce a pour limite la vitesse moyenne et la plus petite vitesse possible a. Les ondes de la première espèce sont les plus *rapides*, celle de la seconde sont les plus *lentes*.

Mais une seule et même vitesse peut appartenir à plusieurs ondes. En effet toutes les ondes de la première espèce pour lesquelles $\varphi_1 + \varphi_2$ a la même valeur, possèdent la même vitesse v_α et de même la vitesse v_β reste la même pour toutes les ondes pour lesquelles $\varphi_1' + \varphi_2'$ a la même valeur. Toutes les normales pour lesquelles $\varphi_1 + \varphi_2$ reste constant sont évidemment les génératrices d'un cône du second degré dont les lignes focales sont les axes optiques et dont l'axe principal coïncide avec l'axe des z (figure 166). Car c'est une propriété d'un pareil cône que la somme des inclinaisons des génératrices avec les lignes focales d'un côté et de l'autre a une valeur constante. D'après cela, les ondes les plus rapides se réunissent en groupes secondaires dont chaque terme a la même vitesse : les normales à ces ondes forment un cône que nous appellerons *cône de vitesse*. A chaque vitesse correspond un autre cône. Mais tous ces cônes qui correspondent aux vitesses en nombre indéfini entre c et b, ont leur sommet en O, ont pour axe principal l'axe des z, pour première section principale (celle de plus grande ouverture) le plan des zx, pour seconde section le plan des yz, et enfin pour lignes focales les axes optiques. Comme limites de ces cônes se trouvent d'un côté l'espace angulaire A_1OA_2 avec la vitesse b, d'autre part la section principale xy avec la vitesse c. En allant d'une manière continue de la vitesse b à la vitesse c, on

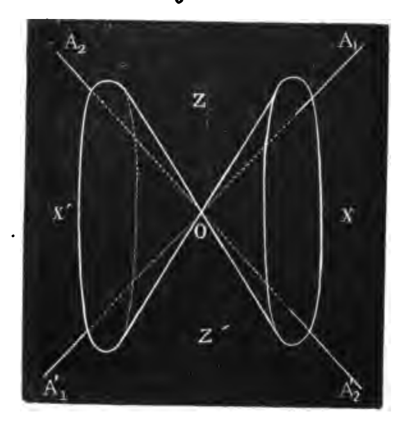
Fig. 166.



passe de même d'une manière continue d'un cône de vitesse à un suivant d'une plus grande ouverture et qui enveloppe complétement le premier.

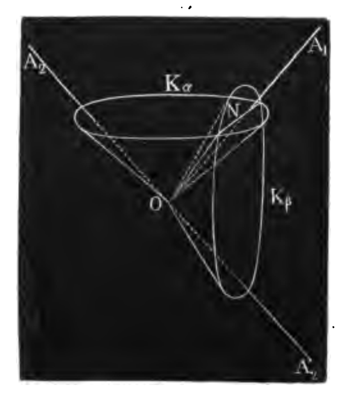
On aura évidemment de la même manière pour les ondes les plus lentes de la seconde espèce un second groupe de cônes. Ils ont aussi leurs centres en O (figure 167), les axes optiques pour lignes focales, mais leur axe principal est sur l'axe des x, leur première section principale dans le plan des xz, la seconde dans celui des xy. Les limites de ce groupe sont d'un côté l'espace angulaire A_1OA_2' avec la vitesse b, d'autre part le plan yz avec la vitesse a; en passant de la première limite à cette dernière la vitesse diminue graduellement.

Fig. 167.



Chaque cône de vitesse d'un groupe, coupe tous les cônes de l'autre sous un angle droit. En effet soit ON (figure 168) une normale quelconque, K_α et K_β les cônes de vitesse de la première et de la seconde espèce menés par cette normale. Menons des plans par ON et les axes optiques et partageons en deux leurs angles dièdres; le plan bissecteur de l'angle compris entre A_1ON et A_2 ON est le plan normal du cône K_α et de même le plan bissecteur de l'angle de $A_2'ON$ et A_1ON est le plan normal du cône K_β : mais ces plans bissecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre, et par conséquent les cônes K_1 et K_2 se rencontrent suivant la génératrice commune ON sous un angle droit. Nous voyons en même temps que le plan normal mené par l'arête d'un cône de vitesse est le plan d'oscillation d'une des ondes qui peuvent se propager dans le milieu cristallin dans la direction de cette arête. C'est ainsi qu'en introduisant dans cette étude la considération des cônes de vitesse on se fait une idée claire, facile à saisir, du partage des directions de vibrations dans un cristal à deux axes.

Fig. 168.



On trouve une expression remarquable pour la différence des vitesses de deux ondes qui suivent la même direction. Les équations primitives de v_α et v_β donnent en effet par soustraction :

$$v_\alpha^2 - v_\beta^2 = (c^2 - a^2) \text{ Sin. } \varphi_1 \text{ Sin. } \varphi_2.$$

La différence des carrés des vitesses de propagation de deux ondes corrélatives est proportionnelle, dans un seul et même milieu, au produit des sinus des angles que la normale commune fait avec les axes optiques.

CONSTRUCTION DES ONDES PLANES AU MOYEN DE LA SURFACE D'ÉLASTICITÉ DE FRESNEL.

La construction des ondes planes, telle qu'elle fut indiquée pour la première fois par Fresnel, s'écarte de celle que nous avons donnée plus haut (1). Elle repose sur la considération d'une surface qui est dans une relation telle avec l'ellipsoïde E, que chacun de ses rayons est réciproque du rayon de l'ellipsoïde dans la même direction. Soit r un rayon de l'ellipsoïde E, et u, v, w, les cosinus des angles qu'il forme avec les trois axes, ψ_1 et ψ_2 ses angles avec les axes optiques, on a dès lors :

$$\frac{1}{r^2} = a^2\text{u}^2 + b^2\text{v}^2 + c^2\text{w}^2 \text{ et aussi } \frac{1}{r^2} = b^2 - (a^2 - c^2) \text{ Cos. } \psi_1 \text{ Cos. } \psi_2.$$

Si maintenant le rayon ρ d'une nouvelle surface doit être égal à la valeur réciproque de r, il faut prendre pour équation de cette surface :

$$\rho^2 = a^2\text{u}^2 + b^2\text{v}^2 + c^2\text{w}^2, \text{ ou } \rho^4 = a^2\rho^2\text{u}^2 + b^2\rho^2\text{v}^2 + c^2\rho^2\text{w}^2,$$
$$\text{c'est-à-dire, } (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

L'équation de la même surface en coordonnées polaires dans l'espace, sera :

$$\rho^2 = b^2 - (a^2 - c^2) \text{ Cos. } \psi_1 \text{ Cos } \psi_2.$$

Fresnel a nommé la surface représentée par ces dernières équations, surface d'*élasticité optique* ou simplement *surface d'élasticité*. De sa relation avec l'ellipsoïde E, il résulte immédiatement qu'un plan mené par le centre commun des deux surfaces, coupe la surface d'élasticité suivant une courbe fermée à deux axes, dont les axes égaux en longueur aux valeurs réciproques des axes de la section diamétrale de l'ellipsoïde, se confondent en direction avec ceux-ci. Ainsi, *parallèlement au plan diamétral, se propagent deux*

(1) Pour l'analyse qui a conduit Fresnel à la surface d'élasticité, voyez *Optique d'Herschell*, § 997 et suiv.

ondes, dont les directions de vibrations et les vitesses sont déterminées par les directions et les grandeurs des demi-axes de cette section curviligne.

Il n'est pas nécessaire de démontrer d'une manière particulière, que les sections principales et les axes de l'ellipsoïde sont aussi les sections principales et les axes de la surface d'élasticité, de même aussi que la surface d'élasticité peut être coupée suivant des cercles et que ces sections circulaires se confondent avec celles de l'ellipsoïde.

Cette surface d'élasticité, comme l'a démontré le mathématicien allemand L.-J. Magnus (voyez ses *Leçons de géométrie analytique à trois dimensions*), est dans un rapport remarquable avec l'ellipsoïde représenté par l'équation suivante :

$$\mathfrak{E}. \ldots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

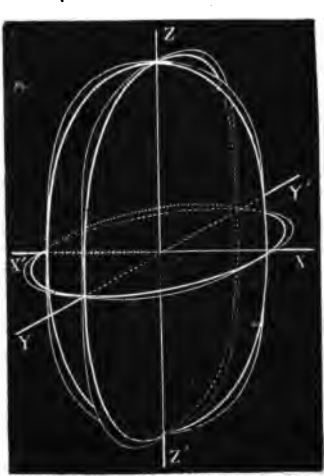
Nous appellerons celui-ci *second* ellipsoïde par opposition à l'ellipsoïde E. Les sections principales des deux surfaces se confondent, les axes de l'ellipsoïde $\mathfrak{E}$ sont les valeurs réciproques des axes dirigés de la même manière dans E, et sont par conséquent égaux aux axes de la surface d'élasticité.

L'ellipsoïde $\mathfrak{E}$ est tangent au point x', y', z', au plan

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1.$$

Menons du centre une perpendiculaire sur ce plan, elle aura pour équations :

Fig. 169.



$$\frac{x}{z} = \frac{\frac{x'}{a^2}}{\frac{z'}{c^2}}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\frac{y'}{b^2}}{\frac{z'}{c^2}}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\frac{x'}{a^2}}{\frac{y'}{b^2}}$$

Eliminons maintenant dans les équations de la perpendiculaire, du plan tangent et de l'ellipsoïde, les quantités x', y', z', nous obtiendrons évidemment une relation entre les coordonnées des pieds de toutes les perpendiculaires, que l'on peut mener du centre sur les plans tangents de $\mathfrak{E}$, en d'autres mots, l'équation du lieu de ces pieds. On trouve facilement pour ce lieu :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

Ce qui n'est autre chose que la surface

d'élasticité. Celle-ci enveloppe de tous côtés l'ellipsoïde 𝕰 excepté aux sommets où les deux surfaces se touchent. La figure 169 représente les trois sections principales des deux surfaces.

CONSTRUCTION DE PLÜCKER DES ONDES PLANES AU MOYEN DE L'ELLIPSOÏDE 𝕰.

On peut aussi, comme l'a montré Plücker (1), se servir de l'ellipsoïde 𝕰 pour la construction des ondes planes. En effet soit TT (figure 170), le plan tangent de l'ellipsoïde 𝕰 au point *t*. Menons par le centre *o* une perpendiculaire *op* sur ce plan, son pied *p* est un point de la surface d'élasticité dont *op* est un des rayons. Perpendiculairement au plan du triangle *top*, on mène par *to* un plan; il coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse SS dont un axe est évidemment *ot*. En tous les points de cette ellipse on pourra faire la même construction que pour le point *t*. Les plans tangents T formeront un cylindre elliptique CC, tangent à l'ellipsoïde suivant la section diamétrale S. Mais les points *p* représentent évidemment dans leur ensemble continu l'intersection de la surface d'élasticité par un plan mené suivant *op* perpendiculairement au plan du triangle *top* et à l'axe du cylindre. Un axe de cette section est *op*, puisqu'en effet le plan *top* est une section principale du cylindre et que tout est symétrique par rapport à lui des deux côtés, d'après la construction. Donc, d'après ce qui précède, *pot* est un des plans de vibrations qui correspondent au plan mené par *po* perpendiculairement à *pot* et la vitesse qui lui correspond est *op*. Nous en déduisons la proposition suivante : *On mène en un point de l'ellipsoïde 𝕰 un plan tangent et on abaisse sur ce plan et du centre une perpendiculaire, la longueur de celle-ci représente la vitesse et le plan passant par le centre, le point de contact et le pied de la perpendiculaire est le plan des vibrations d'une des deux ondes, qui correspondent au plan mené par la perpendiculaire et perpendiculairement au plan des trois points précédents.*

Fig. 170.



(1) Discussion de la forme générale des ondes lumineuses. — *Journal de mathématique de Crelle*, vol. XIX.

Si le cylindre dont on a parlé plus haut se transforme en un des deux cylindres de rotation qui peuvent circonscrire l'ellipsoïde, en même temps le lieu des points p devient un cercle, une section circulaire de la surface d'élasticité et les lignes tp se confondent avec les arêtes du cylindre. Si donc, dans ce cas, on applique à chacun des points de la courbe de contact de l'ellipsoïde et de la surface cylindrique la construction précédente, on trouve, comme on devait s'y attendre, pour les ondes parallèles aux sections circulaires de la surface d'élasticité, successivement toutes les directions possibles de vibrations, mais toujours une seule et même vitesse de propagation.

Les lois du mouvement lumineux dans les cristaux à deux axes, que nous avons étudiées quant à ce qu'elles ont d'essentiel, doivent renfermer, comme cas particulier, celles relatives aux milieux à un seul axe de double réfraction : on peut s'en convaincre facilement. Admettons d'abord que l'axe moyen $\frac{2}{b}$ de l'ellipsoïde E devienne égal au plus grand $\frac{2}{a}$, cet ellipsoïde se transforme en un sphéroïde aplati, dont l'axe de rotation est sur l'axe des z. Les deux sections circulaires se confondent avec l'équateur, et leurs normales, les axes optiques, tombent sur l'axe de rotation qui devient l'axe optique unique. Dans la construction générale des plans de vibrations, les deux plans menés par la normale et les axes optiques se confondent, et comme plans bissecteurs de leurs angles nous obtenons un plan mené par la normale et l'axe optique et un second plan qui passe également par la normale et qui, perpendiculaire au premier, détermine avec le plan d'onde une direction de vibrations perpendiculaire à l'axe optique. Les expressions générales des vitesses qui correspondent à ces directions de vibrations deviendront, puisque φ_1 étant égal à φ_2 φ est l'angle entre ces directions et l'axe optique :

$$v_\alpha{}^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \text{Cos. } 2\varphi = a^2 \text{ Cos.}^2 \varphi + c^2 \text{ Sin.}^2 \varphi$$

$$v_\beta{}^2 = a^2.$$

La vitesse v_β devient ainsi constante et égale à a, elle correspond aux vibrations perpendiculaires à l'axe optique, aux ondes ordinaires. La vitesse v_α correspond aux vibrations qui sont dans les plans menés par l'axe optique, correspond aux ondes extraordinaires, et son expression coïncide exactement avec celle trouvée page 219 pour W. Le milieu à un axe dans lequel nous avons supposé transformé le milieu à deux axes est négatif, puisque $a < c$. Le milieu à deux axes présentera une certaine ressemblance avec ce cristal négatif tant que l'angle des axes optiques, partagé en deux par l'axe des z, sera aigu, et

plus il sera aigu, plus l'analogie sera grande. C'est pourquoi nous appellerons *négatif* un milieu à deux axes dans lequel la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques tombe sur le petit axe $\frac{2}{c}$ de l'ellipsoïde E.

Si nous faisons rapprocher l'axe moyen $\frac{2}{b}$ du plus petit $\frac{2}{c}$, les axes optiques, sans abandonner leur plan, se rapprochent de plus en plus de l'axe des x, et la ressemblance devient plus grande entre le cristal à deux axes et un cristal positif à un axe dont l'axe serait l'axe des x. Nous obtiendrons ce dernier avec toutes ses propriétés si $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

Si la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques tombe sur le plus grand axe $\frac{2}{a}$ de l'ellipsoïde E, le milieu à deux axes est dit *positif*.

Un troisième cas remarquable est celui où les deux axes optiques sont perpendiculaires l'un à l'autre ; il forme le passage des cristaux négatifs aux cristaux positifs.

La bissectrice de l'angle aigu des axes optiques se nomme leur *première* ligne médiane, celle de l'angle obtus leur *seconde* ligne médiane : cette différence disparaît dans le cas d'un milieu dont les axes optiques sont perpendiculaires.

CHAPITRE IX.

Surface de l'onde des cristaux à deux axes.

CONSTRUCTION DE LA SURFACE DE L'ONDE PAR SES PLANS TANGENTS.

En suivant la méthode que nous avons indiquée au cinquième chapitre pour arriver à la surface de l'onde, nous mènerons, perpendiculairement à chaque droite tracée par un point déterminé d'un cristal à deux axes, deux plans, un d'un côté, l'autre de l'autre, à des distances égales aux vitesses des deux ondes qui peuvent se propager dans la direction de la ligne en question

et de chaque côté. Tous les couples de plans en nombre indéfini, que nous obtenons ainsi, enveloppent la surface de l'onde du milieu, c'est-à-dire, la limite jusqu'à laquelle peut se propager au bout de l'unité de temps la lumière partant du point d'origine, en admettant, bien entendu, que ce dernier envoie de la lumière dans toutes les directions. Nous pouvons maintenant reconnaître immédiatement, c'est-à-dire, sans le secours du calcul, plusieurs propriétés de la surface de l'onde. Ainsi il est évident que les sections principales du milieu doivent conserver aussi leur caractère dans la surface de l'onde, que celle-ci doit avoir un centre et être rencontrée par chaque diamètre en quatre points formant deux couples diamétralement opposés et à la même distance du centre, d'où il résulte en outre que cette surface consiste en deux enveloppes dont l'une entoure l'autre, comme c'est le cas dans les milieux à un axe. Nous pouvons même déterminer complétement les sections principales de la surface de l'onde. Menons en effet de nouveau notre système de coordonnées dont les plans se confondent avec les sections principales; on voit facilement que tous les plans tangents à la surface de l'onde et qui la touchent sur une section principale doivent être perpendiculaires à cette dernière et que, dès lors, leurs intersections avec le plan de la section principale seront tangentes à celle-ci. Et réciproquement l'on peut se convaincre sans difficulté que tous les plans tangents perpendiculaires au plan d'une section principale sont tangents aux différents points de cette section. Cela résulte de la construction même des plans tangents.

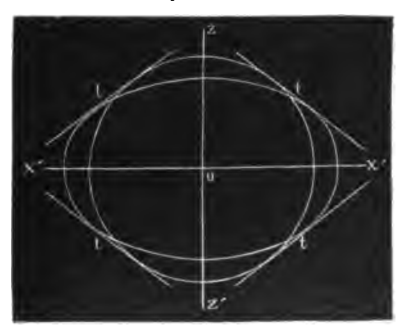
Maintenant les plans tangents qui, par exemple, sont perpendiculaires au plan des xz, appartiennent d'une part à un groupe d'ondes dont les vibrations sont également perpendiculaires à ce plan. La vitesse de ces ondes est constante et a pour valeur b. Nous obtenons donc d'abord, de cette manière, un groupe de plans tangents parallèles à l'axe des y, mais ayant toutes les directions possibles et éloignés de l'origine d'une quantité b. Leurs intersections avec le plan des xz enveloppent, comme tangentes, un cercle dont le rayon est b.

D'un autre côté, un second groupe d'ondes perpendiculaires au plan xz a une vitesse qui dépend de leur direction; ce sont celles dont les vibrations sont dans la section principale même. La vitesse de l'une de ces ondes sera donnée par la valeur réciproque du rayon mené parallèlement à l'onde dans la section principale xz de l'ellipsoïde E. Remarquons que dans les cristaux à un axe, un plan méridien coupe la surface de l'onde suivant une ellipse dont les axes coïncident avec ceux du méridien, et qu'ici, dans le cas d'une section principale, nous avons exactement les mêmes rapports que pré-

cédemment pour chaque méridien; il est clair dès lors que les ondes dont nous parlions plus haut, disposées suivant les grandeurs particulières de leurs vitesses respectives, enveloppent la surface de l'onde suivant une ellipse dont les axes tombent sur les axes des x et des z. Celui qui est sur l'axe des x doit être égal à la valeur réciproque de l'axe des z de l'ellipsoïde E, il a par conséquent pour valeur $2c$. La longueur de l'axe qui correspond aux z se détermine de même et est égal à $2a$.

D'après cela la surface de l'onde sera coupée par le plan des xz suivant un cercle et une ellipse déterminés en grandeur et en position (figure 171). Le rayon b du cercle ayant une valeur comprise entre a et c, les deux courbes se coupent en quatre points symétriquement placés par rapport aux axes des x et des z et diamétralement opposés par couples. En représentant par p la distance au centre de la tangente à l'ellipse (distance qui est égale à v_β d'après la construction), et par φ l'angle que la normale correspondante fait avec l'axe des z, l'équation des tangentes sera :

Fig. 171.



$$p^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2} \text{Cos. } 2\varphi = c^2 + (a^2 - c^2) \text{Cos.}^2 \varphi.$$

Pour les quatre tangentes perpendiculaires aux axes optiques, on aura :

$$\text{Cos.}^2 \varphi = \text{Cos}^2 Z = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}, \text{ et par conséquent :}$$

$$p^2 = b^2 \text{ ou } p = \pm b.$$

D'où nous concluons que ces quatre tangentes sont aussi tangentes à la section circulaire, et, réciproquement, que les quatre lignes droites t qui touchent à la fois le cercle et l'ellipse sont parallèles deux à deux et perpendiculaires aux axes optiques.

Par des considérations analogues à celles que nous venons d'établir pour la section principale xz, nous arriverions à ce résultat que les deux autres plans coordonnés coupent la surface de l'onde suivant un cercle et une ellipse concentriques.

Le rayon du cercle dans la section principale xy a pour longueur c. Dans

l'ellipse, le demi-grand axe qui tombe sur l'axe des x, a pour longueur b, et l'autre, le plus petit, est égal à a. L'ellipse est alors toute entière enfermée dans le cercle (figure 172).

Dans la section principale yz, le demi-grand axe de l'ellipse c tombe sur l'axe des y, le plus petit de longueur b sur l'axe des z. Le cercle qui a pour rayon a est tout entier en dedans de l'ellipse (figure 173).

Fig. 172.

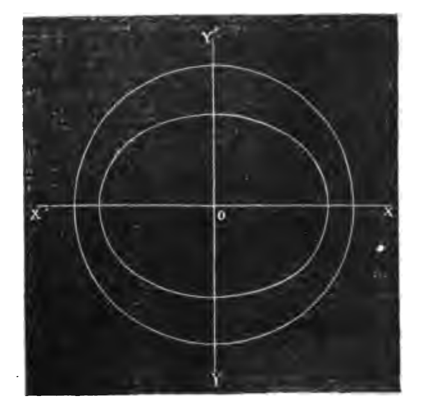


Fig. 173.

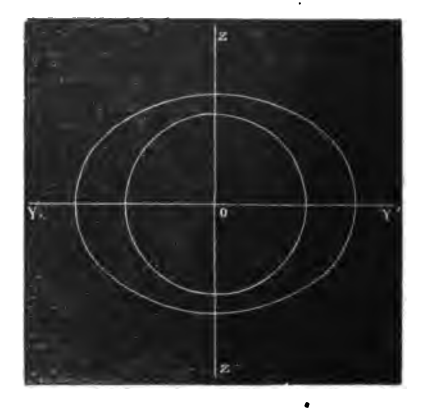
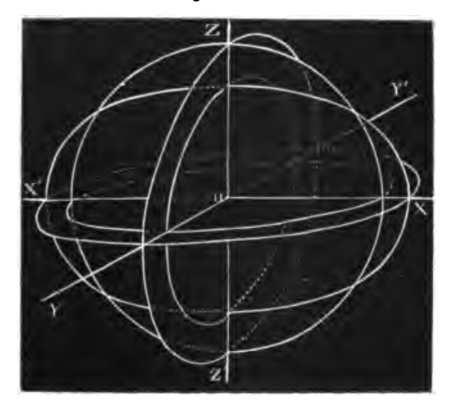


Fig. 174.



On remarque que les sommets des sections principales que nous avons décrites forment douze sommets de la surface de l'onde, et que toujours le sommet d'une ellipse est sur la circonférence d'une section circulaire (figure 174).

ÉQUATION DE LA SURFACE DE L'ONDE EN COORDONNÉES PARAMÉTRIQUES DE SES PLANS TANGENTS.

Nous regardons ordinairement une surface comme le lieu, comme l'ensemble de tous ses points, et nous la représentons dès lors par une équation exprimant la relation qui existe entre les trois coordonnées ordinaires de chacun de ses points et certaines quantités constantes. Mais il est évident qu'on peut, avec tout autant d'exactitude, considérer la surface comme l'enveloppe de ses plans tangents et, en partant de là, on peut la représenter par une équation entre les coordonnées paramétriques de ses plans tangents et des paramètres constants. Par *coordonnées paramétriques* d'un plan nous entendons les valeurs réciproques des segments que le plan détermine sur les trois axes coordonnés, en ayant égard aux signes suivant que le segment est du côté de la moitié positive ou de la moitié négative de l'axe. Par ce moyen un plan sera déterminé d'une manière tout aussi exacte, toute aussi complète qu'un point l'est par ses coordonnées. Or les équations de la page 261 des vitesses des ondes planes, nous conduisent très-facilement à l'équation de la surface de l'onde en coordonnées paramétriques, et l'équation ainsi obtenue nous fait connaître, sans aller plus loin, des propriétés remarquables de cette surface.

Soient φ_1, φ_2 les angles que la normale à un plan fait avec les axes optiques, r sa longueur à partir de l'origine de notre système de coordonnées. Posons pour abréger $\frac{a^2 + c^2}{2} = s$ et $\frac{a^2 - c^2}{2} = t$. D'après la construction générale de la surface de l'onde et les équations de la page 261, le plan déterminé par les quantités r, φ_1 et φ_2, sera un plan tangent à la surface de l'onde, si l'on a :

$$r^2 = s + t \text{ Cos. } (\varphi_1 + \varphi_2) = v_\alpha^2,$$

et aussi

$$r^2 = s + t \text{ Cos. } (\varphi_1 - \varphi_2) = v_\beta^2$$

En outre il est clair, que de tous les plans qui sont perpendiculaires à la direction complétement déterminée par φ_1 et φ_2, il n'y a de tangents à la surface de l'onde que les quatre, mais aussi tous les quatre, pour lesquels on a $r^2 = v_\alpha^2$, $r^2 = v_\beta^2$ ou $r = + v_\alpha$, $r = - v_\alpha$, $r = + v_\beta$, $r = - v_\beta$.

D'après cela, l'équation de la surface de l'onde sera représentée par l'équation suivante :

$$(r^2 - v_\alpha^2)\,(r^2 - v_\beta^2) = 0, \qquad \text{ou :}$$

$$[r^2 - s - t \text{ Cos. } (\varphi_1 + \varphi_2)] [r^2 - s - t \text{ Cos. } (\varphi_1 - \varphi_2)] = 0,$$

et il ne reste plus, pour avoir l'équation en coordonnées paramétriques, qu'à remplacer r^2, φ_1 et φ_2 en fonction de celles-ci. Nous y arriverons par le calcul suivant.

Soit :
$$\text{u}x + \text{v}y + \text{w}z = 1,$$
l'équation en coordonnées ordinaires du plan tangent déterminé par r, φ_1 et φ_2 ; alors u, v, w sont les coordonnées paramétriques du plan, et α, β, γ étant les angles de sa normale avec les axes coordonnés, on a :

$$r^2 = \frac{1}{\text{u}^2 + \text{v}^2 + \text{w}^2}, \text{ Cos. } \alpha = \text{u}r, \quad \text{Cos. } \beta = \text{v}r, \quad \text{Cos. } \gamma = \text{w}r.$$

D'après la formule connue du cosinus de l'angle de deux droites, on a :

$$\text{Cos. } \varphi_1 = \text{Cos. X. Cos } \alpha + \text{Cos. Z Cos. } \gamma = r (\text{u Cos. X} + \text{w Cos. Z}),$$
$$\text{Cos. } \varphi_2 = - \text{Cos. X Cos. } \alpha + \text{Cos. Z Cos. } \gamma = r (- \text{u Cos. X} + \text{w Cos. Z}).$$

Avant de remplacer ces valeurs dans l'équation trouvée pour la surface de l'onde, transformons-la d'abord en celle-ci :

$$r^4 - (v_\alpha{}^2 + v_\beta{}^2) r^2 + v_\alpha{}^2 - v_\beta{}^2 = 0.$$

Mais :

$$v_\alpha{}^2 + v_\beta{}^2 = 2 s + 2 t \text{ Cos } \varphi_1 \text{ Cos } \varphi_2 \quad \text{et}$$
$$v_\alpha{}^2 v_\beta{}^2 = s^2 + t^2 (\text{Cos.}^2\varphi_1 \text{ Cos.}^2\varphi_2 - \text{Sin.}^2\varphi_1 \text{ Sin.}^2\varphi_2) + 2 st \text{ Cos. } \varphi_1 \text{ Cos. } \varphi_2$$
$$= s^2 - t^2 + t^2 (\text{Cos.}^2\varphi_1 + \text{Cos.}^2\varphi_2) + 2 st \text{ Cos. } \varphi_1 \text{ Cos } \varphi_2.$$

Remplaçons dans cette expression les valeurs trouvées de Cos. φ_1, Cos. φ_2, on obtient d'abord :

$$v_\alpha{}^2 + v_\beta{}^2 = 2 s + 2 t r^2 (\text{w}^2 \text{ Cos.}^2 \text{ Z} - \text{u}^2 \text{ Cos.}^2 \text{ X}) \text{ ou puisque}$$
$$r^2 (\text{u}^2 + \text{v}^2 + \text{w}^2) = 1,$$
$$v_\alpha{}^2 + v_\beta{}^2 = 2 r^2 [\text{u}^2 (s - t \text{ Cos.}^2 \text{ X}) + \text{v}^2 s + \text{w}^2 (s + t \text{ Cos.}^2 \text{ Z})]$$
$$= r^2 [\text{u}^2 (b^2 + c^2) + \text{v}^2 (a^2 + c^2) + \text{w}^2 (a^2 + b^2)] = r^2 \text{ A}.$$

Il vient en outre :

$$v_\alpha{}^2 v_\beta{}^2 = s^2 - t^2 + 2 t^2 r^2 (\text{u}^2 \text{ Cos.}^2 \text{ X} + \text{w}^2 \text{ Cos.}^2 \text{ Z})$$
$$+ 2 s t r^2 (\text{w}^2 \text{ Cos.}^2 \text{ Z} - \text{u}^2 \text{ Cos.}^2 \text{ X}),$$

ou bien, à cause de la relation $r^2 (\text{u}^2 + \text{v}^2 + \text{w}^2) = 1$,

$$v_\alpha{}^2 v_\beta{}^2 = r^2 (\text{u}^2 [s^2 - t^2 + 2 t (t - s) \text{ Cos.}^2 \text{ X}] + \text{v}^2 (s^2 - t\ )$$
$$+ \text{w}^2 [s^2 - t^2 + 2 t (t + s) \text{ Cos.}^2 \text{ Z}])$$
$$= r^2 (\text{u}^2 b^2 c^2 + \text{v}^2 a^2 c^2 + \text{w}^2 a^2 b^2) = r^2 \text{ B}.$$

L'équation de la surface de l'onde est donc enfin

$$r^2 - \text{A}r^2 + \text{B} = 0,$$

ou, en remplaçant A, B, r par les expressions qu'ils représentent :

$$B(u^2+v^2+w^2) - A + 1 = 0$$

ou

$$(u^2+v^2+w^2)(u^2b^2c^2+v^2a^2c^2+w^2a^2b^2)$$
$$-[u^2(b^2+c^2)+v^2(a^2+c^2)+w^2(a^2+b^2)]+1=0.$$

Nous pouvons lui donner une autre forme remarquable. Puisque $r^2(u^2+v^2+w^2)=1$, il vient :

$$r^4(u^2+v^2+w^2) - r^2[u^2(b^2+c^2)+v^2(a^2+c^2)+w^2(a^2+b^2)]$$
$$+[u^2b^2c^2+v^2a^2c^2+w^2a^2b^2]=0.$$

Et ce résultat peut s'écrire :

$$\frac{u^2}{r^2-a^2}+\frac{v^2}{r^2-b^2}+\frac{w^2}{r^2-c^2}=0,$$

ou aussi, si nous représentons par s^2 l'expression $\frac{1}{r^2}=u^2+v^2+w^2$,

$$\frac{u^2}{1-a^2s^2}+\frac{v^2}{1-b^2s^2}+\frac{w^2}{1-c^2s^2}=0.$$

Sections principales. — Les trois groupes de plans tangents qui touchent la surface de l'onde sur les sections principales sont, chacun, parallèles à un des axes coordonnés. Pour les plans tangents sur la section principale xz, par exemple, on aura $v=0$: la combinaison de cette équation avec celle de la surface de l'onde donne, pour les coordonnées u et w de ces plans, la relation :

$$[u^2+w^2][u^2b^2c^2+w^2a^2b^2]-[u^2(b^2+c^2)+w^2(a^2+b^2)]+1=0.$$

Cette équation prise en elle-même donne une courbe située dans le plan xz. Pour les coordonnées de ses tangentes on a les mêmes relations que pour les coordonnées des plans tangents correspondants à la section principale de la surface de l'onde. D'après cela, cette dernière équation, considérée comme équation d'une courbe *plane*, représente la section principale xz, et ses tangentes sont les intersections des plans tangents avec le plan coordonné xz. Mais cette équation peut aussi s'écrire :

$$[(u^2+w^2)b^2-1][u^2c^2+w^2a^2-1]=0.$$

La section principale xz se partage donc en deux courbes distinctes dont les équations sont les suivantes :

$$(u^2+w^2)b^2-1=0, \qquad u^2c^2+w^2a^2-1=0.$$

Ce sont des courbes du second ordre ; la première est un cercle de rayon b, décrit de l'origine comme centre ; la seconde est une ellipse dont le grand axe $2c$ est sur l'axe des x et le petit $2a$ sur l'axe des z (figure 171).

Posons $w = 0$, nous aurons pour la section principale xy :

$$[u^2 + v^2][u^2 b^2 c^2 + v^2 a^2 c^2] - [u^2 (b^2 + c^2) + v^2 (a^2 + c^2)] + 1 = 0.$$

Cette équation se partage en :

$$(u^2 + v^2) c^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad u^2 b^2 + v^2 a^2 - 1 = 0,$$

qui représentent le cercle et l'ellipse de la figure 172.

Enfin l'équation de la section yz, pour laquelle $u = 0$ est :

$$[v^2 + w^2][v^2 a^2 c^2 + w^2 a^2 b^2] - [v^2 (a^2 + c^2) + w^2 (a^2 + b^2)] + 1 = 0,$$

et se partage en :

$$(v^2 + w^2) a^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad v^2 c^2 + w^2 b^2 - 1 = 0.$$

Ces dernières donnent le cercle et l'ellipse de la figure 173.

Plans tangents singuliers de la surface de l'onde. ξ, η, ζ étant des coordonnées variables, soit qu'on les considère comme coordonnées paramétriques ou comme coordonnées ordinaires,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

sera l'équation d'une surface. Soient en outre ξ', η', ζ' des valeurs de ces coordonnées satisfaisant à l'équation, et par conséquent appartenant à la surface. Formons l'équation :

$$\text{T}\ldots \frac{df}{d\xi'}(\xi - \xi') + \frac{df}{d\eta'}(\eta - \eta') + \frac{df}{d\zeta'}(\zeta - \zeta') = 0.$$

Celle-ci représente évidemment, si ξ, η et ζ sont les coordonnées d'un point, un plan tangent à la surface au point (ξ', η', ζ'). Les coordonnées paramétriques de ce plan, si nous représentons par N l'expression :

$$\frac{df}{d\xi'}\xi' + \frac{df}{d\eta'}\eta' + \frac{df}{d\zeta'}\zeta' \qquad \text{seront dès lors :}$$

$$u = \frac{\frac{df}{d\xi'}}{N}, \qquad v = \frac{\frac{df}{d\eta'}}{N}, \qquad w = \frac{\frac{df}{d\zeta'}}{N}.$$

Mais d'un autre côté, si ξ, η, ζ sont des coordonnées paramétriques, cette même équation représente le point de contact de la surface et du plan tangent (ξ', η', ζ'), et les coordonnées ordinaires de ce point de contact sont :

$$x = \frac{\frac{df}{d\xi'}}{N}, \qquad y = \frac{\frac{df}{d\eta'}}{N}, \qquad z = \frac{\frac{df}{d\zeta'}}{N}.$$

Dans la représentation des surfaces en coordonnées ordinaires, les points pour lesquels les coefficients de l'équation T, et partant les expressions $\frac{df}{d\xi'}$, etc.,

disparaissent, présentent une singularité. En de pareils points il n'y a pas qu'un seul et unique plan tangent, mais il y en a un nombre indéfini, et ceux-ci ont pour enveloppe, en général, un cône du second degré dont le sommet est le point en question et qui touche la surface en ce point de son côté dans toutes les directions. On trouve pour équation de ce *cône tangent* :

$$\frac{d^2f}{d\xi'^2}(\xi-\xi')^2 + \frac{d^2f}{d\eta'^2}(\eta-\eta')^2 + \frac{d^2f}{d\zeta'^2}(\zeta-\zeta')^2$$

$$+ 2\frac{d^2f}{d\xi' d\eta'}(\xi-\xi')(\eta-\eta') + 2\frac{d^2f}{d\xi' d\zeta'}(\xi-\xi')(\zeta-\zeta')$$

$$+ 2\frac{d^2f}{d\eta' d\zeta'}(\eta-\eta')(\zeta-\zeta') = 0$$

soit : $K = 0.$

Mais si l'on considère les coordonnées paramétriques, l'évanouissement des coefficients de l'équation T, signifie alors que le plan tangent dont les coordonnées sont ξ', η', ζ' ne touche pas la surface en un seul et unique point, mais en un nombre indéfini de points. La suite continue de ces points représente la *courbe de contact* du plan tangent singulier et de la surface, et elle est donnée par l'équation $K = 0$. La courbe de contact est ainsi un cône de seconde classe, c'est-à-dire, une courbe de seconde classe, considérée comme figure dans l'espace.

Un coup d'œil jeté sur la section principale xz, montre que la surface de l'onde possède les deux singularités dont nous venons de parler. A la rencontre du cercle et de l'ellipse qui forment cette section, la surface de l'onde a évidemment plus d'un plan tangent ; ces points de rencontre sont les points singuliers. Un plan que l'on mène par une des quatre tangentes communes à l'ellipse et au cercle, perpendiculairement au plan xz, touche la surface en plus d'un point et est par conséquent un plan tangent singulier. En attendant que nous examinions les points singuliers au moyen de l'équation de la surface de l'onde en coordonnées ordinaires, nous allons chercher les propriétés des plans tangents singuliers.

D'après ce qui précède, et en remplaçant l'équation $f = 0$ par celle de la surface de l'onde, on a pour déterminer les coordonnées u, v, w des plans tangents singuliers :

$$\frac{df}{du} = 0 \quad \text{ou}$$

$$2u\,[u^2b^2c^2 + v^2a^2c^2 + w^2a^2b^2 + b^2c^2(u^2 + v^2 + w^2) - (b^2 + c^2)] = 0$$

ou pour abréger
$$2uA = 0$$

de même $\frac{df}{dv} = 0$ ou

$$2\,v\,[u^2b^2c^2 + v^2a^2c^2 + w^2a^2b^2 + a^2c^2(u^2 + v^2 + w^2) - (a^2 + c^2)] = 0$$

ou $$2\,v\,B = 0,$$

et enfin $\frac{df}{dw} = 0$ ou

$$2\,w\,[u^2b^2c^2 + v^2a^2c^2 + w^2a^2b^2 + a^2b^2(u^2 + v^2 + w^2) - (a^2 + b^2)] = 0$$

ou $$2\,w\,C = 0.$$

Ces trois équations seront satisfaites en même temps :

1° Si l'on a $u = v = w = 0$;

2° Si l'on pose $A = B = C = 0$;

3° Si deux des quantités u, v, w disparaissent avec celle des expressions A, B, C qui correspond à la troisième : ainsi, par exemple, si $u = 0$, $v = 0$ et $C = 0$;

4° Si deux des expressions A, B, C deviennent nulles et en même temps la coordonnée qui correspond à la troisième : ainsi quand $A = C = 0$ et $v = 0$.

Mais il est facile de se convaincre qu'il n'y a que le quatrième et dernier cas qui peut réellement convenir à un plan tangent de la surface. Et par conséquent les coordonnées des plans tangents singuliers seront données par les groupes d'équation suivants :

$$A = 0,\ B = 0,\ w = 0;\ B = 0,\ C = 0,\ u = 0;\ A = 0,\ C = 0,\ v = 0.$$

Considérons d'abord le dernier groupe. Nous pouvons écrire à sa place, en ayant égard à la condition qui lui correspond $v = 0$,

1) $v = 0$

2) $u^2\,b^2\,c^2 + w^2\,a^2\,b^2 + b^2\,c^2\,(u^2 + w^2) - (b^2 + c^2) = 0.$

3) $u^2\,b^2\,c^2 + w^2\,a^2\,b^2 + a^2\,b^2\,(u^2 + w^2) - (a^2 + b^2) = 0.$

Retranchant les deux dernières membre à membre, il vient :

$$2')\ b^2\,(u^2 + w^2) - 1 = 0.$$

Multiplions l'équation 2) par a^2, l'équation 3) par c^2 et retranchons l'une de l'autre, on aura :

$$3')\ u^2\,c^2 + w^2\,a^2 - 1 = 0.$$

Comme plans tangents singuliers de la surface de l'onde, nous aurons donc ceux dont les coordonnées satisfont aux équations 1), 2') et 3'). Mais l'équation 1) nous dit que chacun de ces plans doit être parallèle à l'axe des y, l'équation 2') que son intersection avec le plan des xz est tangente au cercle de la section principale xz et l'équation 3') qu'elle est tangente à l'ellipse de cette même section.

Pour les coordonnées de ces plans nous trouvons d'après les équations 1) jusqu'à 3') les relations suivantes :

$$u^2 = \frac{1}{b^4}\,\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}, \qquad v^2 = 0, \qquad w^2 = \frac{1}{b^2}\,\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2},$$

et elles satisfont, comme le montre la substitution, à l'équation de la surface.

Ainsi *les quatre plans menés par la tangente double à la section principale xz et perpendiculairement à son plan, sont des plans tangents singuliers de la surface de l'onde.*

Si au lieu du groupe d'équations que nous avons choisi, nous en eussions pris un autre, nous serions arrivés absolument de la même manière à trouver encore comme plans tangents singuliers ceux qui sont perpendiculaires à une des deux autres sections principales et menés par la tangente commune au cercle et à l'ellipse de cette section. Mais ces tangentes communes sont imaginaires, puisque les sections coniques ne se rencontrent pas : il en résulte que ces plans tangents singuliers sont aussi imaginaires et que ceux que nous avons étudiés en premier sont les seuls réels.

La question qui s'offre maintenant, est relative à la courbe de contact. Pour avoir son équation, déduisons les valeurs de $\frac{d^2 f}{du^2}$ etc. et substituons-les dans les coordonnées paramétriques trouvées pour les plans tangents singuliers. Nous aurons :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{du^2} = 4\, b^2 c^2 u^2 = 4\,\frac{c^2\,(b^2 - a^2)}{c^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dv^2} = b^2\,(c^2 u^2 + a^2 w^2) + a^2 c^2\,(u^2 + w^2) - (a^2 + c^2)$$

$$= -\,\frac{(c^2 - b^2)\,(b^2 - a^2)}{b^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dw^2} = 4\, a^2 b^2 w^2 = 4\,\frac{a^2\,(c^2 - b^2)}{c^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{du\,dv} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{du\,dw} = 2 b^2\,(a^2 + c^2)\,uw = \pm\, 2\,\frac{(a^2 + c^2)\sqrt{(c^2 - b^2)\,(b^2 - a^2)}}{c^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dv\,dw} = 0.$$

L'équation de la courbe de contact sera d'après cela, en représentant par u', v', w' les coordonnées paramétriques d'un plan singulier :

$$b^2c^2 (b^2 - a^2)(u - u')^2 - \tfrac{1}{4}(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)(v - v')^2 + b^2a^2 (c^2 - b^2)(w - w')^2$$
$$\pm b^2 (a^2 + c^2)\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}\,(u - u')(w - w') = 0.$$

Le signe du radical, comme le montre l'expression $\frac{d^2f}{du\,dw}$, sera pris en accord avec celui du produit u' w'. Comme toutes les courbes de contact sont semblablement placées par rapport aux plans coordonnés et sont identiques, nous ne considérerons par la suite qu'une seule d'entre elles, savoir celle qui est placée au-dessus du plan des xy et à droite du plan des yz : pour elle on a u'w' > 0, il faut donc prendre le radical avec le signe $+$.

Faisons dans l'équation de la courbe de contact w $= 0$, elle devient l'équation de sa projection sur le plan xy. On a :

$$b^2c^2 (b^2 - a^2)(u - u')^2 + b^2a^2 (c^2 - b^2)\,w'^2$$
$$- \tfrac{1}{4}(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)(v - v')^2$$
$$- b^2 (a^2 + c^2)\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}\,(u - u')\,w' = 0.$$

Elle représente en coordonnées paramétriques l'équation d'une ellipse dont un axe est sur l'axe des x, et par conséquent la courbe de contact est aussi une ellipse dont l'axe est sur la tangente commune, dont les sommets sont les points de contact de cette tangente avec le cercle et l'ellipse.

Si dans la dernière équation on fait u $= 0$, les deux racines v de l'équation qui en résulte sont les valeurs réciproques des segments que déterminent sur l'axe des y les tangentes à la projection parallèles à l'axe des x. La valeur réciproque d'une racine n'est donc rien autre chose qu'un demi-axe de la projection et aussi de la courbe de contact elle-même perpendiculaire à la section principale xz, cette courbe ayant le même demi-axe. Mais la substitution indiquée change l'équation de la projection en la suivante :

$$\tfrac{1}{4}(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)(v - v')^2 = b^2c^2 (b^2 - a^2)\,u'^2$$
$$+ b^2a^2 (c^2 - b^2)\,w'^2 + b^2 (a^2 + c^2)\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}\,u'w'$$

et au lieu de celle-ci on peut écrire, à cause des valeurs de u', v', w' :

$$\tfrac{1}{4}(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)\,v^2 = b^4 (c^2 - a^2).$$

Représentons par l la longueur des demi-axes dont nous avons parlé plus haut, on aura donc :

$$l = \frac{\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}}{2b}$$

Pour obtenir la longueur de l'axe de la projection situé sur l'axe des x,

nous ferons dans son équation $v = 0$; les valeurs réciproques des racines u dans l'équation résultante, donnent les distances des sommets de cet axe à l'origine des coordonnées. Mais puisque $v' = 0$, on a :

$$c^2(b^2-a^2)u^2 - [2c^2(b^2-a^2)u' + (a^2+c^2)\sqrt{(c^2-b^2)(b^2-a^2)}\,w']\,u$$
$$+ c^2(b^2-a^2)u'^2 + a^2(c^2-b^2)w'^2$$
$$+ (a^2+c^2)\sqrt{(c^2-b^2)(b^2-a^2)}\,u'w' = 0.$$

Par la substitution des valeurs de u' et de w', le terme constant se change en $c^2 - a^2$ et le coefficient de u devient :

$$\frac{1}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}\,(b^2+c^2)(c^2-a^2)$$

Représentons alors par d la valeur réciproque de u, la distance d'un sommet, on a :

$$d^2 - \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}\,(b^2+c^2)\,d + \frac{c^2(b^2-a^2)}{c^2-a^2} = 0.$$

La différence des racines d n'est autre que la distance des sommets ou la longueur 2ρ de l'axe de la projection qui tombe sur l'axe des x, on aura donc pour la moitié de cet axe :

$$\rho = \frac{1}{2b}(c^2 - a^2)\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}.$$

L'axe 2ρ est la projection de l'axe de la courbe de contact qui coïncide avec la tangente commune. Représentons ce dernier par $2l'$, en nommant Z_1 l'angle d'un axe optique (la normale à la tangente commune et au plan singulier) avec l'axe des z, on a :

$$\rho = l' \text{ Cos. } Z_1,$$

d'où :

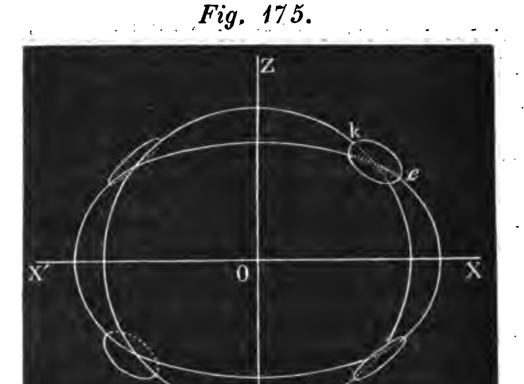
$$l' = \frac{\rho}{\text{Cos. } Z_1} = \frac{c^2-b^2}{2b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}}$$
$$= \frac{1}{2b}\sqrt{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Nous voyons d'après cela que $l = l'$, par conséquent que les *courbes de contact sont des cercles, dont le diamètre est égal à la portion ek* (Fig. 175) *des tangentes communes dans la section principale xz.*

A un plan tangent ordinaire de la surface de l'onde correspond un rayon lumineux unique, le rayon mené par le point de contact. Mais aux plans tangents singuliers correspond une infinité de rayons, savoir tous ceux menés

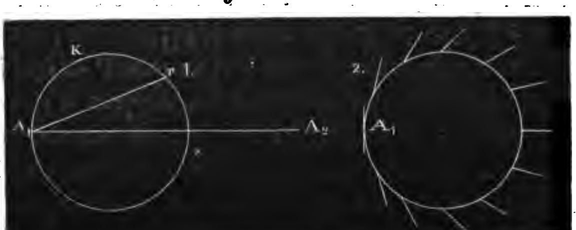
par le centre de la surface et les points de la courbe de contact. Ces rayons forment, d'après ce qui précède, un cône du second ordre dont le sommet est au centre de la surface de l'onde et dont la base est la courbe de contact elle-même; des deux sections circulaires, l'une est perpendiculaire à l'arête qui est dans la direction de l'axe optique, et est par conséquent parallèle à la courbe de contact. La première section principale du cône, celle qui contient l'angle de plus grande ouverture, est dès lors perpendiculaire à la section principale xz, au plan des axes optiques; la seconde section se confond avec ce plan.

Fig. 175.



A chacun des rayons en question correspond, comme nous allons le voir, un plan de vibrations particulier; il passe par le rayon et par l'axe optique. Ainsi, soit K (figure 176, 1), une courbe de contact, A_1 le point où passe un axe optique et $A_1 A_2$ la trace du plan des deux axes. La ligne A_1r qui joint le point A_1 au point r de sortie d'un de ces rayons, détermine la direction des vibrations de ce dernier. La figure 176, 2, représente la polarisation sur la périphérie de la courbe de contact.

Fig. 176.



ÉQUATION DE LA SURFACE DE L'ONDE EN COORDONNÉES ORDINAIRES.

Outre les deux constructions que nous avons indiquées et qui donnent les plans tangents à la surface de l'onde, Fresnel en a imaginé une troisième au moyen de laquelle on peut trouver un nombre quelconque de ses points. Elle s'appuie sur la considération du second ellipsoïde désigné par $\mathfrak{E}$. *On coupe l'ellipsoïde $\mathfrak{E}$ par un plan diamétral, du centre on élève sur celui-ci une perpendiculaire et on porte sur elle, à partir de ce centre, et des deux côtés, les longueurs du demi-grand axe et du demi-petit axe de la section diamétrale : les quatre points ainsi obtenus sont des points de la surface de l'onde.* Fresnel n'a pas démontré que la surface de l'onde ainsi obtenue coïncide avec celle trouvée par les autres procédés ; mais Ampère a prouvé leur identité par l'analyse (1). Nous préférons ici, pour montrer l'accord complet de toutes les constructions données, employer la méthode de Plucker, qui s'appuie sur les quelques remarques géométriques suivantes.

Soient x', y', z' les coordonnées d'un point P, et $S = 0$ l'équation d'une sphère dont le rayon est l'unité et dont le centre est à l'origine des coordonnées. Avec le point P, quelle que soit d'ailleurs sa place, concevons un plan E déterminé par cette équation :

$$\frac{dS}{dx'}x + \frac{dS}{dy'}y + \frac{dS}{dz'}z = 1.$$

A cause de cette liaison entre le point et le plan, nous appellerons P le *pôle* de E, et E le *plan polaire* de P. Il est facile de s'assurer que E est perpendiculaire à la ligne qui joint le centre de la sphère au point P, et que le produit des distances du centre au plan E et au point P est égal à l'unité.

Si l'on a maintenant une surface F et si l'on construit le plan polaire de chacun de ses points, tous ces plans enveloppent une seconde surface Φ et l'on peut démontrer que les plans polaires de tous les points de la seconde surface touchent la première, en sorte que, si t et p sont le plan tangent et le point de contact de la première, τ et π sont les mêmes pour la seconde, et si τ est le plan polaire de p, t sera le plan polaire de π.

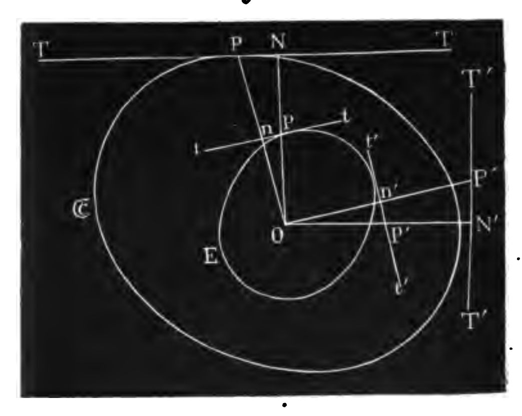
Cette proposition, dont on peut trouver la démonstration dans les ouvrages de mathématiques, rend facile, comme nous allons le voir, la liaison des différentes constructions de la surface de l'onde.

Supposons que le plan de la figure 177 passe par le rayon OP d'un point P

(1) V. *Détermination de l'équation de la surface de l'onde.* Ann. de Pogg. XXX.

du second ellipsoïde 𝔈 et par la perpendiculaire ON menée du centre sur le plan tangent TT au point P. Soit en outre l'ellipse E, l'intersection de ce plan avec le premier ellipsoïde, et l'ellipse 𝔈, son intersection avec le second. Un plan mené par NO, perpendiculairement au plan du triangle NOP, coupe la surface d'élasticité (voyez page 266), suivant une courbe dont un axe est ON, et il en résulte que Op est également un axe dans la section du même plan avec l'ellipsoïde E (voyez page 265), et l'on a :

Fig. 177.



$$1) \qquad ON.\, Op = 1.$$

On voit en outre que le plan tangent au point p au premier ellipsoïde étant perpendiculaire au plan de la figure, passe par la tangente tt à l'ellipse E, de même aussi que le plan TT peut être regardé comme plan polaire du point p par rapport à une sphère S de rayon 1 dont le centre serait en O. Le premier et le second ellipsoïdes sont donc (voyez plus haut), par rapport à la sphère en question, conjugués polairement et P est aussi le pôle de tt ; donc, d'après cela :

$$2) \qquad On.\, OP = 1.$$

D'après les équations 1) et 2) nous voyons que les triangles opn et OPN sont semblables entre eux, en sorte que on est la normale à tt.

Tournons maintenant de 90° les triangles PON, pon dans leur plan ainsi que les plans TT, tt, de sorte qu'ils viennent dans la position P'ON', $p'on'$, T'T', $t't'$. Après ce mouvement, P' reste le pôle de $t't'$ et p' celui de T'T'.

Si nous appliquons ces constructions à chacun des points de l'ellipsoïde 𝔈, nous obtenons deux groupes de plans T'T' et $t't'$, et chacun d'eux enveloppe une surface. D'après la proposition de la page précédente, ces surfaces sont polairement conjuguées et P' est le point de contact de T'T' et p' celui de $t't'$. Mais comme on l'a vu page 266 et suivantes, les plans T'T' enveloppent la surface de l'onde, dès lors P' est un point de cette dernière. C'est en cela que consiste la démonstration de l'accord complet de la

troisième construction de Fresnel avec les deux premières, car OP' est une perpendiculaire à la section diamétrale de l'ellipsoïde 𝔈 par le plan mené par OP perpendiculairement au plan OPN, et la longueur de cette perpendiculaire est égale à l'un des demi-axes OP de cette section diamétrale.

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration simple que l'ensemble des plans $t't'$ enveloppe une surface d'onde naturellement différente en position et en dimensions de celle dont nous venons de parler et que par conséquent la polaire de la surface de l'onde est une nouvelle surface d'onde.

Le plan tangent T'T', considéré comme une onde, correspond au rayon OP'. Le plan de vibrations des deux est celui du triangle PON comme aussi du triangle P'ON' d'où il *résulte que le plan de vibrations d'un rayon et de l'onde plane correspondante est déterminé par ce rayon et la normale au plan de l'onde*, comme nous l'avons aussi trouvé dans les milieux à un axe.

Dans la construction des ondes planes par la méthode de Plucker, nous trouvons qu'à tous les points de la courbe de contact d'un cylindre de révolution et de l'ellipsoïde 𝔈 correspond une seule et même vitesse et par conséquent pour la surface de l'onde un seul et unique couple de plans tangents (deux plans tangents singuliers), mais que chaque point donne un autre plan de vibrations déterminé par un axe optique et le rayon passant par le point. La même chose a lieu ici dans la construction des rayons. Tous les points d'une section circulaire de l'ellipsoïde donnent de même des rayons de même direction et de même longueur, par conséquent seulement deux points de la surface de l'onde, diamétralement opposés. Ces rayons là sont perpendiculaires à la section circulaire et leur longueur est égale à son rayon b : on reconnaît donc dans leurs extrémités les points singuliers de la surface de l'onde. Les plans de vibrations que l'on obtient pour les rayons lumineux de chacun de ces points doivent passer par les rayons vecteurs aboutissant à ces points et la normale à la section circulaire, et sont par conséquent dans tous les azimuths. De même que pour les plans tangents singuliers, il y a pour les points singuliers un nombre indéfini de plans de vibrations.

A cause de la similitude des rôles que jouent les normales aux sections circulaires des deux ellipsoïdes, on a appelé aussi celles de l'ellipsoïde 𝔈 axes optiques, mais pour les distinguer de ceux dont nous avons déjà souvent parlé, on les a désignés sous le nom d'*axes optiques des rayons*; pour abréger nous les appellerons *axes optiques secondaires* (1). Les angles des axes

(1) Il sera plus convenable de conserver le dénomination « d'axe optique apparent » à la direction suivant laquelle se réfracte un faisceau lumineux dont les ondes se pro-

optiques secondaires sont partagés en parties égales, par les axes coordonnés des x et des z; ils ne sont pas éloignés beaucoup des axes optiques propres. Représentons respectivement par X_1', Z_1', X_2', Z_2' les angles que les axes optiques secondaires font avec les axes coordonnés; on aura d'après les expressions de la page 257, relatives aux axes optiques proprement dits, en remplaçant les demi-axes de E par les demi-axes correspondants de 𝔈 :

$$\text{Cos. } X'_1 = + \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}}, \quad \text{Cos. } Z'_1 = + \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}}$$

$$\text{Cos. } X'_2 = - \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}}, \quad \text{Cos. } Z'_2 = + \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}}$$

L'analogie entre la première et la troisième construction de Fresnel, permet de transporter à celle-ci toutes les conséquences déjà déduites de la première. Pour cela on devra donc permuter d'abord le premier ellipsoïde avec le second et aussi les axes optiques propres avec les axes secondaires. A la place de la normale à l'onde on aura le rayon; pour vitesse d'une onde, ou bien si on regarde cette onde comme un plan tangent à la surface de l'onde, pour sa distance au centre, il faudra prendre la valeur réciproque de la longueur du rayon correspondant ou de sa vitesse (celle-ci, voyez page 226 et suivantes, n'est autre chose que la vitesse avec laquelle le point de contact d'un plan tangent à la surface de l'onde se propage le long du rayon pendant que cette surface s'étend dans l'espace; elle est par conséquent égale à la longueur de ce rayon dans la surface de l'onde qui correspondrait à l'unité de temps). Cette transposition nous conduit aux deux propositions suivantes qui déterminent complétement les propriétés des rayons :

1° *Si l'on mène par une direction donnée et les deux axes optiques secondaires deux plans et si l'on partage en deux parties égales les angles dièdres qu'ils forment, les plans bissecteurs sont les plans de vibrations des deux rayons qui correspondent à cette direction.* La direction des vibrations de chaque rayon est en outre dans le plan de l'onde correspondant et est dès lors en général inclinée sur la ligne de propagation.

pagent dans un cristal suivant la direction d'un axe optique des ondes, pour pénétrer ensuite dans l'air ambiant.

2° *Soient s_α et s_β les vitesses de deux rayons qui sont dans la même direction et soient* ψ_1 et ψ_2 *les angles de celle-ci avec les axes optiques secondaires, on aura, comme on peut le déduire des équations de la page 260 :*

$$\frac{1}{s_\alpha^2} = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}}{2} + \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}{2} \text{Cos.} (\psi_1 + \psi_2)$$

$$\frac{1}{s_\beta^2} = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}}{2} + \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}{2} \text{Cos.} (\psi_1 - \psi_2)$$

Nous pouvons encore préciser davantage au moyen du cône des vitesses les lois des rayons qui se groupent autour des axes secondaires optiques comme lignes focales, et qui se distinguent en rayons de premier et de second ordre (plus rapides et plus lents).

Des équations précédentes, on déduit aussi la loi trouvée par M. Biot :

$$\frac{1}{s_\alpha^2} - \frac{1}{s_\beta^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) \text{Sin.}\ \psi_1\ \text{Sin.}\ \psi_2$$

La différence des carrés des valeurs réciproques des vitesses de deux rayons de même direction est proportionnelle au produit des sinus des deux angles que cette direction fait avec les deux axes optiques secondaires.

Enfin au moyen des équations de s_α et de s_β il est possible d'arriver à l'équation de la surface de l'onde. En représentant par r la longueur du rayon dont la direction est déterminée par les angles ψ, cette équation est la suivante :

$$(r^2 - s_\alpha^2)(r^2 - s_\beta^2) = 0 \text{ ou } (r^2 \frac{1}{s_\alpha^2} - 1)(r^2 \frac{1}{s_\beta^2} - 1) = 0.$$

Remplaçons dans ces équations s_α^2 et s_β^2 par leurs valeurs, en représentant pour abréger $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ par σ et $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)$ par τ, il vient :

$$r^4 [\sigma^2 - \tau^2 + \tau^2 (\text{Cos.}^2 \psi_1 + \text{Cos.}^2 \psi_2) + 2 \sigma \tau \text{ Cos.} \psi_1 \text{ Cos.} \psi_2]$$
$$- r^2 (2 \sigma + 2 \tau \text{ Cos.} \psi \text{ Cos.} \psi_1) + 1 = 0.$$

Et cette équation peut facilement se transformer en une autre en coordonnées ordinaires. Représentons par x, y, z les coordonnées de l'extrémité de r, en outre par α, β, γ les angles de ce rayon avec les axes, on a :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{Cos.}\ \alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{Cos.}\ \beta = \frac{y}{r}, \quad \text{Cos.}\ \gamma = \frac{z}{r}$$

et en même temps

$$\text{Cos. } \psi_1 = \frac{1}{r}(x \text{ Cos. } X_1' + z. \text{Cos. } Z_1')$$

$$\text{Cos. } \psi_2 = \frac{1}{r}(- x \text{ Cos. } X_1' + z. \text{ Cos. } Z_1')$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation précédente, ainsi qu'une transformation tout à fait analogue à celle de la page 273, conduisent pour l'équation cherchée à la suivante :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2)$$
$$-[a^2 x^2 (b^2 + c^2) + b^2 y^2 (a^2 + c^2) + c^2 z^2 (a^2 + b^2)] + a^2 b^2 c^2 = 0,$$

à laquelle, avec Hamilton, on peut donner cette forme :

$$\frac{a^2 x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = 0.$$

Points singuliers de la surface de l'onde. L'équation de la surface de l'onde en coordonnées ordinaires doit évidemment nous faire connaître, aussi complétement que par les coordonnées paramétriques, les propriétés de cette surface ; mais pour éviter les répétitions inutiles, nous lui demanderons seulement la nature des points en question, et cette recherche, d'après les remarques générales de la page 275, doit être tout à fait analogue à celle qui nous a fait connaître les plans tangents singuliers.

Les coordonnées des points singuliers doivent satisfaire aux équations suivantes:

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ ou } 2x[a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 + a^2 (r^2 - b^2 - c^2)] = 2x\text{A} = 0$$

$$\frac{df}{dy} = 0 \text{ ou } 2y[a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 + b^2 (r^2 - a^2 - c^2)] = 2y\text{B} = 0$$

$$\frac{df}{dz} = 0 \text{ ou } 2z[a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 + c^2 (r^2 - a^2 - b^2)] = 2z\text{C} = 0.$$

Or cela n'aura lieu que pour les points réels de la surface pour lesquels on aura :

$$y = 0 \quad \text{A} = 0 \quad \text{C} = 0 \quad \text{ou}$$

1) $y = 0$

2) $a^2 x^2 + c^2 z^2 + a^2 (r^2 - b^2 - c^2) = 0$

3) $a^2 x^2 + c^2 z^2 + c^2 (r^2 - a^2 - b^2) = 0.$

Les deux dernières équations peuvent se remplacer par celles-ci qui en proviennent :

$$2') \; r^2 = x^2 + z^2 = b^2 \qquad 3') \; \frac{x^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

L'équation 1) nous apprend que les points singuliers sont dans la section principale xz, les équations 2') et 3') nous disent qu'ils sont à la fois sur le cercle et l'ellipse de cette section. *Les quatre points d'intersection du cercle et de l'ellipse dans la section principale xz, ou les extrémités des axes optiques secondaires sont donc les points singuliers de la surface de l'onde.*

Pour les coordonnées x', y', z' d'un de ces points, les équations 1) jusqu'à 3') donnent les relations suivantes :

$$x'^2 = \frac{c^2 (b^2 - a^2)}{c^2 - a^2}, \quad y'^2 = 0, \quad z'^2 = \frac{a^2 (c^2 - b^2)}{c^2 - a^2}$$

La courbure de la surface en un point singulier sera représentée par le cône de contact. Pour obtenir son équation pour un des points singuliers, celui par exemple qui est situé entre les moitiés positives des x et des z, nous chercherons d'abord les expressions $\frac{d^2 f}{dx'^2}$ etc. Nous trouvons :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx'^2} = 4 a^2 x'^2 = 4 a^2 c^2 \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dy'^2} = (a^2 x'^2 + c^2 z'^2) + b^2 (x'^2 + z'^2 - a^2 - c^2)$$

$$= -(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dz'^2} = 4 c^2 z'^2 = 4 a^2 c^2 \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dy' dz'} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx' dz'} = 2 (a^2 + c^2) x' z' = 2 ac (a^2 + c^2) \sqrt{\frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{c^2 - a^2}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx' dy'} = 0$$

L'équation du cône de contact est alors :

$$a^2 x'^2 (x - x')^2 - \tfrac{1}{4}(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)(y - y')^2 + c^2 z'^2 (z - z')^2$$
$$+ (a^2 + c^2) x' z' (x - x')(z - z') = 0 \quad \text{ou}$$
$$a^2 c^2 (b^2 - a^2)(x - x')^2 - \tfrac{1}{4}(c^2 - a^2)(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)(y - y')^2$$
$$+ a^2 c^2 (c^2 - b^2)(z - z')^2$$
$$+ ac (a^2 + c^2)\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}\,(x - x')(z - z') = 0$$

Cette équation représente un cône du second degré, ayant pour sommet le point singulier lui-même et dont une section principale axiale est dans le plan xz (Fig. 178); cette section principale passe par les tangentes xx et $\varepsilon\varepsilon$

au cercle et à l'ellipse. La bissectrice de l'angle obtus de ces tangentes est l'axe du cône. Toute une moitié des tangentes xx et $\varepsilon\varepsilon$ est complétement en dehors de la surface de l'onde; ces moitiés touchent la partie extérieure de la surface, celle qui correspond aux rayons les plus rapides de la *première espèce*. Les autres moitiés des tangentes qui pénètrent dans l'intérieur de la surface, sont tangentes à la partie interne de celle-ci, à celle qui correspond aux rayons les plus lents de la *seconde espèce*. La même chose a lieu pour deux arêtes du cône limitant une autre section axiale. Toute la nappe du cône en dehors de la surface est tangente à celle-ci par sa convexité, en formant un creux en forme d'entonnoir qui plonge de tous côtés vers la surface au point singulier. La seconde nappe touche par sa concavité l'enveloppe intérieure de la surface, comme un pavillon de cor, vers lequel pointe la surface au point singulier. Dans la figure 179, $s_1 s_1$ représente la portion de l'enveloppe extérieure limitée par la courbe de contact du plan tangent singulier et $s_2 s_2$ est la portion qui correspond au point singulier de l'enveloppe interne. Mais, pour rendre plus sensible la courbure, on a exagéré dans le voisinage des points singuliers le pointement et la dépression. La figure 180 représente l'enveloppe externe S_1 et l'enveloppe interne S_2 séparées et dans une position telle, que leurs axes sont dans la même direction que ceux des surfaces E et $\mathfrak{E}$, etc., dans les figures précédentes. Si l'on découpait en quelque sorte la surface de l'onde suivant les courbes de contact, elle serait partagée en deux parties. Une d'elles est l'enveloppe extérieure sans les quatre rebroussements commençant à ces courbes et pénétrant dans l'intérieur en forme d'entonnoir. La seconde est formée par l'enveloppe interne plus les quatre portions en entonnoir. Les plans tangents à la première partie sont évidemment distants du centre d'une quantité plus grande que le demi-axe b et moindre que le grand axe c : cette



Fig. 178.

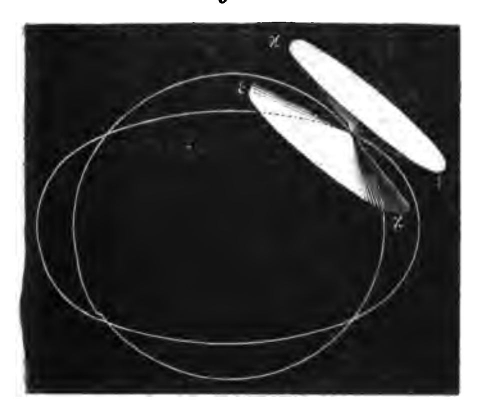
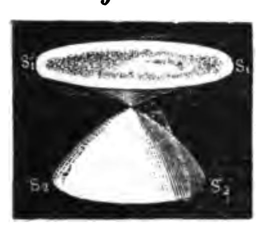


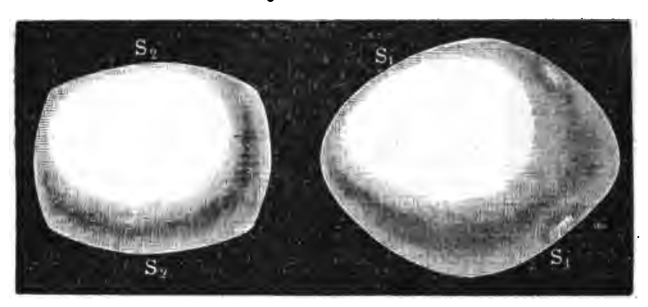
Fig. 179.



portion et ses plans tangents correspondent aux ondes les plus rapides, à celles de la première espèce. De même la seconde partie, dont les plans



Fig. 180.



tangents sont à des distances du centre comprises entre b et le plus petit demi-axe a, correspond aux ondes de la *seconde espèce,* qui sont les plus lentes.

La forme propre à la surface de l'onde au voisinage des points singuliers échappa à l'illustre Fresnel; elle fut pour la première fois complétement reconnue par le mathématicien anglais Hamilton (1).

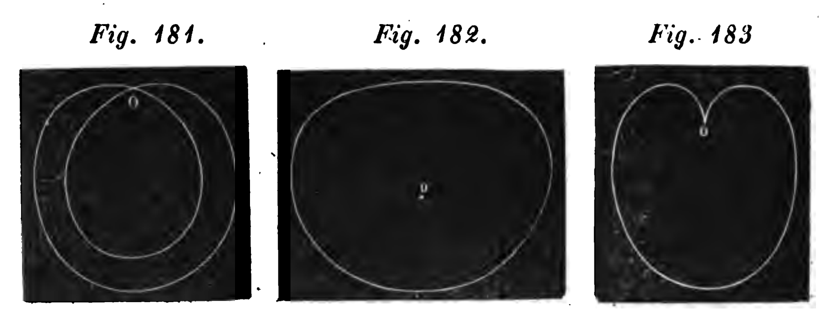
Si du centre de la surface de l'onde, nous abaissons des perpendiculaires sur les plans tangents aux points singuliers, celles-ci formeront évidemment deux cônes concentriques, les cônes supplémentaires des cônes de contact. Mais comme deux cônes de contact, dont les sommets sont diamétralement opposés, ont leurs sections principales parallèles, les perpendiculaires qu'on mènera sur les plans tangents d'un pareil couple ne formeront qu'un seul cône. Dans la suite nous nous occuperons des rapports de ces cônes supplémentaires avec la surface de l'onde; nous allons seulement chercher leurs équations et pour cela nous emploierons la méthode indiquée par Plucker.

Un plan mené par un point singulier de la surface de l'onde, la coupe évidemment suivant une courbe pour laquelle ce point est aussi singulier. Mais de la position du plan dépend la nature de la singularité de la courbe, savoir si le point est un point double proprement dit, c'est-à-dire, l'intersection de deux branches réelles (Fig. 181), ou un point isolé (Fig. 182), ou enfin un point de rebroussement (Fig. 183), qui est le passage du premier cas au second. On a évidemment un point de rebroussement quand le plan est

(1) *Ann. de Pogg.* XXVIII.

tangent à la surface de l'onde. En effet, un plan tangent en un point singulier ne coupe pas la portion interne de la surface de l'onde, mais bien l'en-

Fig. 181. *Fig. 182.* *Fig. 183*



veloppe externe et il la coupe suivant une courbe dont les tangentes au point singulier sont les deux lignes droites communes au plan tangent et au cône de contact. En ce point, par conséquent, la courbe d'intersection présentera un point de retroussement. Réciproquement, quand cela aura lieu, le plan de la courbe d'intersection sera tangent à la surface de l'onde.

Soit donc :

$$\mathrm{u}x + \mathrm{v}y + \mathrm{w}z = 1,$$

l'équation d'un plan quelconque mené par le point singulier. Projetons sur le plan des xy la courbe suivant laquelle il coupe la surface de l'onde, nous aurons pour équation de cette projection, en remplaçant z par sa valeur dans l'équation de la surface :

$$f\left[x, y, \left(\frac{1 - \mathrm{u}x - \mathrm{v}y}{\mathrm{w}}\right)\right] = 0.$$

Comme dans cette projection, la projection du point singulier sera aussi un point singulier, on aura, en représentant par x', y', z' ses coordonnées :

$$\frac{df}{dx'} = 0, \quad \frac{df}{dy'} = 0.$$

Si maintenant dans la courbe d'intersection elle-même, le point singulier est un point de rebroussement, cela doit aussi avoir lieu dans la projection, et réciproquement la courbe d'intersection aura un point de rebroussement si la projection en a un. Mais la projection du point singulier sera un point de rebroussement, si on a :

$$\left(\frac{d^2f}{dx'dy'}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx'^2}\cdot\frac{d^2f}{dy'^2} = 0.$$

Notre plan sera donc un plan tangent quand ses coordonnées u, v, w

satisferont à la dernière équation, et alors aussi, si on suppose que u, v, w soient des coordonnées paramétriques, cette équation représentera la surface enveloppe des plans tangents du point singulier, c'est-à-dire, le cône de contact. Opérant les différentiations indiquées, il vient :

$$a^2x'^2\mathrm{w}^2 + a^2c^2\mathrm{v}^2 + c^2z'^2\mathrm{u}^2 - (a^2 + c^2)\, x'z'\mathrm{u\,w} = 0 \quad \text{ou aussi :}$$

$$(b^2 - a^2)\,\mathrm{w}^2 + (c^2 - a^2)\,\mathrm{v}^2 + (c^2 - b^2)\,\mathrm{u}^2$$
$$\pm \frac{a^2 + c^2}{ac}\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}\,\mathrm{u\,w} = 0.$$

De cette équation du cône de contact il est facile maintenant de déduire celle du cône supplémentaire cherché. Soient x, y, z les coordonnées et r le rayon vecteur d'un point de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan (u, v, w), p étant la distance de ce plan à l'origine, on a :

$$\frac{x}{rp} = \mathrm{u}, \quad \frac{y}{rp} = \mathrm{v}, \quad \frac{z}{rp} = \mathrm{w}.$$

En substituant ces valeurs de u, v et w dans l'équation du cône de contact, on obtient une relation entre les coordonnées de tous les points des perpendiculaires que l'on peut mener de l'origine sur les plans tangents au point singulier, c'est-à-dire, l'équation cherchée du cône supplémentaire, on trouverait :

$$a^2x'^2z^2 + a^2c^2y^2 + c^2z'^2x^2 - (a^2 + c^2)\, x'z'\, xz = 0 \quad \text{ou}$$

$$(b^2 - a^2)\, z^2 + (c^2 - a^2)\, y^2 + (c^2 - b^2)\, x^2$$
$$\mp \frac{a^2 + c^2}{ac}\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}\, x\, z = 0.$$

On pouvait reconnaître à *priori* que les deux cônes représentés par cette dernière équation, sont symétriquement placés par rapport aux plans des yz et des yx, et qu'une section principale coïncide avec le plan des zx. Mais les conséquences suivantes, pour lesquelles nous avons précisément cherché cette équation, sont moins évidentes.

Faisons tourner le système des coordonnées autour de l'axe des y, jusqu'à ce que l'axe des x passe par un point singulier $(x', 0, z')$. Pour l'angle α dont on doit tourner, on a :

$$\text{Cos.}\ \alpha = \frac{x'}{b} \qquad \text{Sin.}\ \alpha = \frac{z'}{b}$$

Les coordonnées primitives x' et z', s'expriment dès lors en fonctions des nouvelles x et z respectivement par :

$$\frac{xx' - zz'}{b} \quad \text{et} \quad \frac{xz' + zx'}{b}$$

L'équation du cône supplémentaire appartenant à $(x', 0, z')$ par rapport au nouveau système de coordonnées deviendra :

$$a^2 x'^2 (xz' + zx')^2 + a^2 b^2 c^2 y^2 + c^2 z'^2 (xx' - zz')^2$$
$$- (a^2 + c^2) x' z' (xx' - zz') (xz' + zx') = 0.$$

Et pour son intersection avec le plan des yz il vient :

$$z^2 (x'^2 + z'^2) (a^2 x'^2 + c^2 z'^2) + a^2 b^2 c^2 y^2 = 0.$$

Mais comme pour le point singulier, intersection du cercle et de l'ellipse formant la section principale xz, on a

$$x'^2 + z'^2 = b^2 \qquad \text{et } a^2 x'^2 + c^2 z'^2 = a^2 c^2$$

la dernière équation trouvée se réduit à

$$z^2 + y^2 = 0,$$

qui veut dire que le plan zy est une section circulaire du cône. Or le nouveau plan zy est perpendiculaire à l'axe optique secondaire passant par le point singulier et cet axe est une des arêtes du cône situées dans la section principale xz. Dès lors le second plan de la section circulaire est aussi perpendiculaire à la seconde arête et cette seconde arête n'est évidemment rien autre chose que la normale à la tangente menée, par le point singulier, à l'ellipse de la section principale xz. *Les deux plans des sections circulaires du cône sont donc perpendiculaires au plan des xz et parallèle aux tangentes que l'on peut mener par le point singulier au cercle et à l'ellipse de la section principale xz.*

CHAPITRE X.

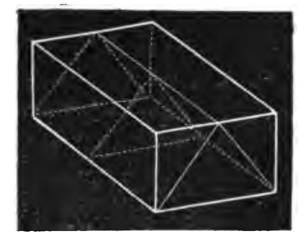
Passage de la lumière d'un milieu isotrope dans un cristal à deux axes.

Les cristaux à deux axes possèdent aussi la double réfraction ; on en reconnaîtra la raison, si dans la construction des ondes et des rayons réfractés dans les cristaux à un axe (page 225) on remplace la surface de l'onde de ces derniers par celle d'un cristal à deux axes. Celle-ci se compose, comme la première, d'une partie interne et d'une partie externe et à chacune d'elles,

on ne peut dans le milieu cristallin mener qu'un seul plan tangent par la perpendiculaire élevée en E′ au plan d'incidence. Nous obtenons ainsi toujours deux ondes et deux rayons réfractés. Les normales aux ondes sont toujours dans le plan d'incidence, ce qui n'a pas lieu pour les directions des rayons, qui tous deux en général sortent de ce plan. Dès lors il n'y a plus à distinguer ici les rayons ordinaires et les rayons extraordinaires. Les deux rayons, en lesquels se divise le rayon incident, suivent des lois de réfraction particulières.

Pour démontrer ce fait important, Fresnel a donné deux méthodes. Nous nous bornerons ici à suivre la marche la plus directe, et pour l'autre, qui suppose la connaissance des phénomènes de diffraction, nous renverrons à l'optique d'Herschel, 1014. Fresnel tailla dans la même topaze deux prismes isocèles dont la face latérale inégale était perpendiculaire à la bissectrice de l'angle aigu des deux axes et par conséquent parallèle à la face de plus facile clivage. La base d'un prisme était parallèle à la section principale passant par la plus petite diagonale (le plan des axes optiques) et celle du second l'était à la section menée par la plus grande diagonale (celle qui contient la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques et la normale à ces derniers). Les deux prismes furent réunis par leurs bases de manière que leurs arêtes soient en prolongement et furent ensuite polis ensemble pour leur donner exactement le même angle réfringent : celui-ci avait une valeur de 92°. Enfin le double prisme ainsi obtenu fut achromatisé par des prismes de verre placés des deux côtés. (Fig. 184.)

Fig. 184.



Si les lois de la double réfraction dans la topaze sont les mêmes que dans les cristaux à un axe, cette réfraction ne pourra être que positive, l'axe optique coïncidera avec la bissectrice de l'angle aigu des axes et les deux portions du double prisme devront présenter exactement les mêmes propriétés. Ce n'est pas ce qui arrive. Lorsque Fresnel regarda à travers le prisme disposé horizontalement une ligne noire horizontale éloignée et placée sur un fond blanc, et qu'il tourna le prisme autour de son arête réfringente, jusqu'à ce que la plus déviée des deux images de la ligne eut atteint son minimum de déviation, l'image la moins déviée lui parut brisée à l'endroit où les prismes partiels se touchaient, tandis qu'il ne vit pas une pareille rupture dans la première image. La ligne brisée paraissait le plus

éloignée de l'autre dans le prisme dont la base était parallèle au plan des axes optiques.

A l'image non brisée, se trouvant au minimum de déviation, correspondaient respectivement dans le cristal les directions de la bissectrice de l'angle obtus des axes et de la normale aux axes optiques, et cette image avait acquis une réfraction analogue à la réfraction extraordinaire. La réfraction de l'image brisée et la moins déviée est analogue à la réfraction ordinaire d'un cristal à un axe. La réfraction dans la topaze n'est donc pas la même suivant la direction des deux bissectrices des axes, que suivant leur normale; l'indice de la première est plus grand que celui de la dernière.

Nous aurions pu déduire tous ces résultats des mesures de Rudberg, que nous avons déjà rapportées; mais nous avons cru devoir citer cette intéressante expérience de Fresnel à cause de l'importance qu'elle a eue pour le développement de l'optique.

Bien que la construction géométrique des rayons et des ondes refractés dans un cristal à deux axes soit très-simple, cependant leur détermination analytique présente d'autant plus de difficultés que les propriétés de ces rayons et de ces ondes sont représentées en général par des expressions assez compliquées. Nous ne ferons donc qu'indiquer la méthode qu'il faudrait suivre dans un cas particulier; l'emploi de cette méthode pourra, quand ce sera possible, être abrégé au moyen d'approximations convenables, mais desquelles on ne pourra rien conclure de général; tel est le cas où l'on se propose de calculer ce qui se passe, dans un cristal avec la lumière polarisée convergente.

En prenant pour axes coordonnés, les mêmes que ceux que nous avons choisis dans l'étude de la double réfraction dans un cristal à un axe, soient α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 les angles que font avec ces axes les deux axes optiques (qui doivent être donnés de position, ou dont la position doit pouvoir se calculer au moyen de celle donnée des axes principaux optiques et des constantes du milieu). Soient en outre r' et r'' les angles cherchés que les normales aux ondes réfractées font avec la normale au point d'incidence et φ_1', φ_2', ainsi que φ_1'', φ_2'' ceux que chacune de ces normales fait avec les axes optiques, on a d'abord :

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Cos. } \varphi_1' = -\text{Cos. } \alpha_1 \text{ Sin. } r' + \text{Cos. } \gamma_1 \text{ Cos. } r' \\ \text{Cos. } \varphi_2' = -\text{Cos. } \alpha_2 \text{ Sin. } r' + \text{Cos. } \gamma_2 \text{ Cos. } r' \\ \text{Cos. } \varphi_1'' = -\text{Cos. } \alpha_1 \text{ Sin. } r'' + \text{Cos. } \gamma_1 \text{ Cos. } r'' \\ \text{Cos. } \varphi_2'' = -\text{Cos. } \alpha_2 \text{ Sin. } r'' + \text{Cos. } \gamma_2 \text{ Cos. } r''. \end{array}\right.$$

v' et v'' étant les vitesses inconnues des ondes réfractées, i l'angle d'inci-

dence donné, et v la vitesse connue dans le milieu isotrope, nous avons :

$$2)\quad \frac{v'}{v} = \frac{\text{Sin. } r'}{\text{Sin. } i}\quad \frac{v''}{v} = \frac{\text{Sin. } r''}{\text{Sin. } i}$$

Enfin si v' correspond à l'onde la plus rapide et v'' à la plus lente, on a :

$$3)\ v' = s + t\ \text{Cos.}\,(\varphi_1{}' + \varphi_2{}'),\qquad v'' = s + t\ \text{Cos.}\,(\varphi_1{}'' + \varphi_2{}'')$$

Les équations de 1) à 3) suffisent pour la solution complète du problème de la réfraction. En effet les équations 2) nous donnent r' et r'' en fonction de v', v'', v et i. La substitution dans 1) donne ensuite les valeurs de $\varphi_1{}'$ etc. au moyen des quantités connues v, i, α_1.., α_2... et des inconnues v' et v''. Enfin celles-ci se déterminent par une dernière substitution dans 3), au moyen des deux équations résultantes qui outre v' et v'' ne contiennent plus que des quantités connues.

Un moyen plus direct mais bien plus long de trouver les ondes réfractées, consisterait à chercher les plans tangents que l'on peut mener à la surface de l'onde par la perpendiculaire élevée en E'. Il est inutile de donner la marche du calcul. On trouve par ce moyen les coordonnées des points de contact et par conséquent les directions des rayons. Soient x', y', z' les coordonnées d'un de ces points u', v', w' les coordonnées paramétriques de l'onde correspondante et enfin $f\,(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface de l'onde en coordonnées ordinaires, on a

$$\frac{df}{dx'} : \frac{df}{dy'} : \frac{df}{dz'} = \mathrm{u}' : \mathrm{v}' : \mathrm{w}'$$

qui détermine l'onde plane réfractée.

Quand les ondes réfractées sont calculées, la direction des rayons peut se trouver aussi de la manière suivante.

On cherche, ce qui est facile, les coordonnées paramétriques u', v', w' d'une onde réfractée. Désignons ensuite par x', y', z' les coordonnées ordinaires de son point de contact, du point d'émergence de son rayon, et par $f\,(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}) = 0$ l'équation de la surface de l'onde en coordonnées paramétriques, on a :

$$\frac{df}{d\mathrm{u}'} : \frac{df}{d\mathrm{v}'} : \frac{df}{d\mathrm{w}'} = x' : y' : z',$$

et on en déduit facilement les équations du rayon.

Les deux rayons réfractés sont en général hors du plan d'incidence ; mais on peut démontrer aussi, par le raisonnement suivant, qu'il n'y a que dans des cas particuliers que l'un d'eux sera dans ce plan. Si l'un des rayons réfractés

est dans le plan d'incidence, il y a à distinguer deux cas possibles : ou le rayon est incliné sur la normale à son onde, ou il se confond avec elle. Dans le premier cas, les vibrations du rayon sont dans le plan d'incidence, puisque celui-ci passe par le rayon et la normale à l'onde. Alors les axes optiques doivent nécessairement avoir une position particulière, telle que les plans menés par ces axes et la normale soient également inclinés sur le plan d'incidence.

Le second cas, où la normale et le rayon coïncident, ne peut évidemment arriver, que si l'onde réfractée touche la surface de l'onde sur le contour d'un des trois cercles suivant lesquels cette surface est coupée par les sections principales, et alors les vibrations sont perpendiculaires au cercle correspondant.

Les conditions pour que les deux rayons soient dans le plan d'incidence sont encore plus spéciales. Si dans ce cas l'un des rayons est incliné sur la normale à son onde, le second doit coïncider avec elle, car sans cela le plan de vibrations du dernier devrait coïncider avec le plan d'incidence, par conséquent aussi avec le plan de vibrations du premier, sans que les deux rayons aient la même direction, ce qui est impossible. Ainsi les conditions des deux cas déjà examinés doivent être remplies en même temps. Admettons maintenant (figure 185), qu'une section principale soit dans le plan d'incidence.

Fig. 185.



L'onde plane *o* touche alors la surface en un point d'une section circulaire et l'onde *e* sur le contour d'une section elliptique. Ne supposons rien de particulier quant à la position de cette dernière section : et pour nous faire une idée des différents cas qui peuvent se présenter quand un des rayons réfractés se confond avec la normale à son onde, nous n'aurons évidemment qu'à faire tourner la surface de l'onde autour de la normale à *o* : cela ne fait que changer la direction des vibrations de la dernière onde. Mais le rayon de l'onde *e* abandonne évidemment le plan d'incidence et y revient après une rotation de 180°, c'est-à-dire, quand la section principale et le plan d'incidence

coïncident de nouveau. Dès lors les mêmes rapports doivent se présenter si l'on tourne du même angle dans un sens ou dans l'autre. Seulement dans le cas particulier où la normale à o est dirigée suivant un axe principal (fig. 186, a),

Fig. 186, a.



le rayon e est déjà dans le plan d'incidence après une rotation de 90° et alors aussi il est tangent à la circonférence d'une seconde section circulaire. De tout cela nous concluons ce qui suit :

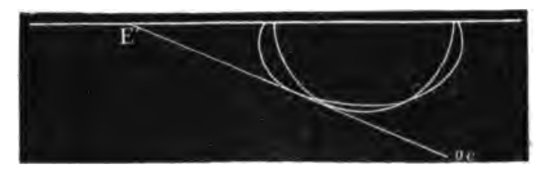
Les deux rayons réfractés ne sont ensemble dans le plan d'incidence, que quand celui-ci est une section principale. En outre l'un d'eux coïncide toujours avec la normale à son onde et est réfracté comme dans un milieu isotrope. L'indice de cette réfraction est le quotient de la vitesse de la lumière dans le milieu ambiant, par le rayon de la section circulaire de la surface de l'onde qui coïncide avec le plan d'incidence. Les vibrations du rayon sont perpendiculaires au plan d'incidence. Ce rayon est donc tout à fait analogue au rayon réfracté ordinaire dans un milieu à un axe, dans le cas où l'axe optique est dans le plan d'incidence. De même le second rayon est tout à fait semblable au rayon réfracté extraordinaire dans le milieu à un axe. A la place de l'ellipse suivant laquelle, dans ce dernier cristal, la partie extraordinaire de la surface de l'onde est coupée par le plan d'incidence, il faut, dans le milieu à deux axes, prendre l'ellipse de la section principale située dans le plan d'incidence. — Dans le cas particulier où la normale du rayon réfracté extraordinaire est sur un axe principal, il se comporte aussi comme dans la réfraction ordinaire. Ce cas correspond à celui des milieux à un axe, où l'axe optique est perpendiculaire à l'onde réfractée extraordinaire, seulement il y a cette différence que dans les cristaux à un axe la direction et la vitesse des deux rayons sont les mêmes, et que la direction de la polarisation n'est pas déterminée, tandis qu'ici cela n'a pas lieu.

Nous distinguerons encore le cas très-remarquable où au rayon incident ne correspondent pas deux rayons réfractés, mais un nombre indéfini, cas qui est tout particulier aux milieux que nous étudions. Cette réfraction, que nous

examinerons en détail par la suite, arrive quand l'onde réfractée est parallèle à un plan tangent singulier de la surface de l'onde (Fig. 186, *b*). — La



Fig. 186, b.



normale à l'onde est alors parallèle à un axe optique et sa vitesse est *b*; on a donc :

$$\frac{\text{Sin. } i}{\text{Sin. } r} = \frac{v}{b}.$$

Si donc on connaît la position des axes optiques, et aussi l'angle r, cette équation donne l'incidence i pour laquelle cette réfraction a lieu.

PHÉNOMÈNES DIOPTRIQUES QUE PRÉSENTENT LES PLAQUES A FACES PARALLÈLES DANS LES MILIEUX A DEUX AXES.

Pour étudier les phénomènes dioptriques dans les milieux à deux axes, on rencontrera naturellement encore plus de difficultés que dans les cristaux à un axe. Toutefois, dans ce qui précède, on a toutes les données fondamentales nécessaires pour la solution du problème actuel, en tant néanmoins qu'on ne s'occupe pas du changement d'intensité qu'éprouve le mouvement lumineux en passant d'un milieu dans un autre. Pour des motifs faciles à comprendre, il est plus commode de suivre la lumière dans son passage à travers une plaque cristalline limitée par deux surfaces planes parallèles, et nous allons faire connaître dans ce cas ce qu'il y a de plus général, de plus nécessaire. Mais nous traiterons avec plus de détails ce qui a rapport aux phénomènes si intéressants de la réfraction conique.

Si un faisceau de rayons parallèles tombe sur une lame cristalline à deux axes, terminée par des faces parallèles, il se partage en deux rayons réfractés extraordinaires polarisés en ligne droite. Chacun d'eux suit sa route particulière et sort ensuite par la seconde face à sa place propre, pour retourner dans le milieu ambiant en reprenant sa direction primitive. De la plaque émergent donc deux faisceaux de rayons parallèles, ayant la même direction que le rayon incident, mais plus ou moins déviés par rapport à celui-ci et qui en diffèrent en outre en ce qu'ils sont toujours polarisés en ligne droite,

suivant des directions déterminées, et possèdent d'autres phases qui dépendent aussi bien de leur direction et de leur vitesse dans le cristal que de l'épaisseur de la plaque. La divergence des rayons dans le cristal est la plupart du temps très-faible, toutefois elle est assez remarquable dans l'arragonite. Afin donc d'obtenir les rayons séparés après leur sortie de la lame, il faut prendre un faisceau incident très-délié et une plaque très-épaisse. On y arrive en recouvrant une face de la lame aussi épaisse que possible, avec une feuille de métal (d'étain) dans laquelle on pratique une ouverture très-étroite, puis on y fait arriver, dans la direction voulue, un faisceau lumineux intense. On reconnaît alors la double réfraction en recevant la lumière émergente sur un écran de papier blanc, où l'on voit deux images de l'ouverture. Si l'on place entre le cristal et l'écran un spath d'Islande et si l'on tourne ce dernier autour de son axe, la disparition et l'apparition alternatives de l'une et de l'autre image prouvent leur polarisation rectiligne. On observe encore la double réfraction plus directement et plus nettement, en tournant la face couverte de métal vers une source lumineuse (un point du ciel, ou la flamme d'une lampe) et en regardant à travers le cristal vers l'ouverture : celle-ci apparaît double. Pour rechercher les rapports de polarisation, on interpose un polarisateur entre l'œil et le cristal. Comme la divergence des ondes réfractées, surtout pour une incidence peu oblique, peut être regardée en général comme fort petite, ces ondes seront sensiblement polarisées à angle droit. Pour plans de vibrations des rayons sortant du cristal, on peut prendre approximativement les plans menés par les axes des faisceaux et les deux lignes droites, suivant lesquelles la seconde face est coupée par les plans de vibrations des rayons dans l'intérieur du cristal. D'après cela, les rayons sortant du cristal seront polarisés presque à angle droit, ce qu'indique aussi la mesure directe.

Pour juger au moins approximativement des rapports d'intensité, on s'appuie sur les considérations suivantes. Les plans de vibrations des rayons réfractés coupent la première face suivant deux lignes droites. Au rayon s_1 correspond la ligne l_1, au rayon s_2 la ligne l_2. Par chacune de ces lignes et l'axe du faisceau incident on mène un plan, et on décompose ce faisceau en deux composants, dont les plans de vibrations seraient ces plans là. Soient respectivement a_1 et a_2 les amplitudes de ces composantes; on aura pour les amplitudes des rayons s_1 et s_2, $\mu_1\ a_1$ et $\mu_2\ a_2$ en appelant μ_1 et μ_2 deux coefficients peu différents de l'unité, dont la vraie valeur ne se déterminerait théoriquement que par des recherches difficiles, pour le passage du mouvement lumineux d'un milieu dans l'autre.

Comme plus haut, il ne nous sera possible de développer avec précision que quelques cas très-simples de la dioptrique des lames cristallisées et en particulier celui de l'incidence normale des rayons.

Incidence normale. Si une onde lumineuse tombe sur la plaque cristalline parallèlement à sa surface, il se propagera dans l'intérieur du cristal, d'après l'application du principe d'Huyghens, deux groupes d'ondes planes, tous deux parallèles à l'onde incidente. Ils se distinguent naturellement l'un de l'autre par la polarisation, la vitesse et la direction de propagation. Quant à ce qui est de la dernière, on trace d'un point quelconque de la première face, comme centre, une surface d'onde et on cherche les points où celle-ci est touchée par des plans tangents parallèles à ce plan réfractant : les lignes qui joignent ces points au centre sont les directions des rayons réfractés ; ou bien, ce qui revient au même, on cherche, d'après la page 296, les deux rayons correspondants au plan d'onde dont les normales sont perpendiculaires à la plaque cristalline.

Comme on doit connaître les angles que les axes optiques font avec les faces de la plaque ou avec sa normale, ou comme on doit pouvoir les calculer au moyen des données, les formules de v_α et v_β donneront les vitesses des ondes réfractées. Leurs plans de vibrations passent par la normale à la plaque et partagent par moitié les angles des deux plans menés par la normale et chaque axe optique : ils passent donc par les bissectrices des angles, que font sur la surface de la plaque les projections des axes optiques. Et comme les vibrations se propagent parallèlement à la surface, ces bissectrices donnent elles-mêmes les directions des vibrations.

Si la lumière incidente est polarisée en ligne droite et si la direction de ses vibrations fait avec une des lignes désignées plus haut par l_1 l'angle φ et par conséquent avec l'autre l'angle $90° - \varphi$, on peut la décomposer en deux composantes dont les vibrations sont parallèles à l_1 et à l_2 et dont les amplitudes sont respectivement a Cos. φ et a Sin. φ, a étant l'amplitude initiale. Chacune des composantes se propage évidemment dans chacune des ondes réfractées, sans donner naissance à d'autres vibrations.

Soit maintenant :

$$y = a \operatorname{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x + A),$$

l'équation d'un rayon incident.

En outre soient y_1 et y_2 les écarts des rayons sortant normalement du cristal, écarts comptés suivant les directions l_1 et l_2 ; comme en même temps à ces directions doivent correspondre dans le cristal des vitesses différentes v_1 et v_2, les équations des rayons émergents seront :

$$y_1 = \mu_1 \, a \, \text{Cos.} \, \varphi \, \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}\left[vt - x + \text{A} - \left(\frac{v}{v_1} - 1\right)\text{D}\right]$$

et

$$y_2 = \mu_2 \, a \, \text{Sin.} \, \varphi \, \text{Sin.} \frac{2\pi}{\lambda}\left[vt - x + \text{A} - \left(\frac{v}{v_2} - 1\right)\text{D}\right]$$

D étant l'épaisseur de la plaque et μ_1 et μ_2 deux coefficients d'affaiblissement.

La différence de phases des rayons est donc : $\left(\frac{v}{v_1} - \frac{v}{v_2}\right)$ D.

En général les deux rayons réfractés ne seront pas dans la direction de la lumière incidente. Seulement si une section principale est perpendiculaire à la plaque, un des plans tangents touche cette section sur la circonférence de son cercle, et le rayon correspondant est le prolongement rectiligne du rayon incident. Le plan tangent du second rayon touche l'ellipse de la section principale ; ce rayon sera donc déplacé dans le plan de la section principale. Les vibrations des rayons sont respectivement perpendiculaires et parallèles à la section principale ; la réfraction est donc semblable à celle d'un cristal à un axe dont l'axe optique est incliné sur la plaque.

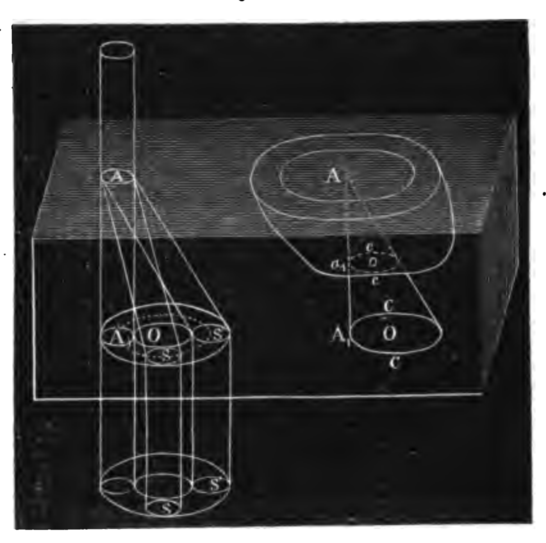
Les rayons réfractés conservent la direction de la lumière incidente, si deux sections principales, et par conséquent un axe principal, sont perpendiculaires à la plaque. Les vibrations sont alors dans l'une et dans l'autre section principale.

Réfraction conique intérieure. — La construction donnée plus haut pour les plans de vibrations et les intensités des rayons réfractés, fait défaut quand un des axes optiques est perpendiculaire à la surface de la lame et que sa projection se réduit à un point. Cela ne doit pas nous surprendre, puisque dans ce cas un plan parallèle à la plaque ne touche pas la surface de l'onde en un nombre limité de points, mais suivant le nombre indéfini de points d'un cercle de contact ; au rayon incident correspond donc un nombre indéfini de rayons réfractés qu'il faut maintenant déterminer avec plus d'exactitude.

Pour la netteté de l'exposition, nous admettrons que l'onde incidente est limitée par une circonférence et n'est pas polarisée. Nous ferons abstraction de la différence d'affaiblissement que probablement doivent éprouver dans leur intensité les rayons de diverses directions, et dans cette hypothèse tous les rayons possibles doivent exister et avoir une intensité égale. Du centre A (figure 187), de la portion circulaire de la première face frappée par la lumière, décrivons une surface d'onde et menons-lui un plan tangent parallèle

à la face de la plaque; soit cc le cercle de contact. Son centre o est dans le plan des axes optiques du côté du second axe optique incliné sur la plaque,

Fig. 187.



ou du côté opposé suivant que le cristal donne des signes de double réfraction positive ou de réfraction négative, et le cercle cc est touché en un point a_1 de sa circonférence par la perpendiculaire élevée en A (laquelle est en même temps l'axe du faisceau incident, la normale à la plaque et un axe optique).

Nous avons trouvé, page 280, pour le rayon $a_1 o$ du cercle cc :

$$a_1 o = \frac{1}{2b}\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Maintenant chaque arête du cône dont le sommet est en A et dont cc est la base, sera l'axe d'un rayon réfracté, et la directrice de tous les faisceaux réfractés est le contour circulaire de la portion éclairée de la première face.

Le faisceau incident se divise ainsi en un nombre indéfini de rayons divergents. Les axes de ces rayons rencontrent la seconde surface sur la circonférence d'un cercle CC, dont le centre O est sur la ligne qui joint A et o, et dont la circonférence comme celle de cc passe par la perpendiculaire Aa_1.

Sur les points de cette circonférence seront donc les centres des ondes cir-

Remarque relative à la figure 187. **Pour plus de netteté on a séparé la surface de l'onde, le cercle de contact, etc., de la figure principale, qui se trouve à gauche.**

culaires réfractées en nombre indéfini, au moment où elles rencontrent la seconde face de la plaque. La forme de la partie éclairée de la seconde face dépend du rapport qui existe entre le rayon R du cercle CC et celui r de l'onde réfractée : celui-ci étant donné, celui-là se calcule par la proportion :

$$R : a_1 o = A_1 A : a_1 A.$$

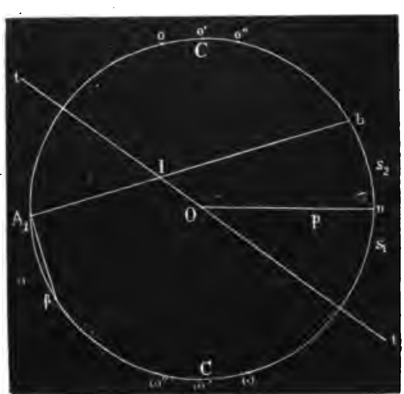
Mais $a_1 A$ est la distance du plan tangent singulier au centre, par conséquent c'est b ; on aura dès lors en représentant par D l'épaisseur $A_1 A$ de la plaque :

$$R = \frac{D.\, a_1 o}{b} = \frac{D}{2\, b^2} \sqrt{(b^2 - a^2)\,(c^2 - b^2)}$$

Ce rayon croît donc dans le même milieu proportionnellement à l'épaisseur de la plaque, mais se calcule du reste au moyen des constantes a, b, c de ce milieu. S'il surpasse le rayon de l'onde circulaire, il est clair que les rayons réfractés éclaireront sur la seconde face un espace annulaire. Cet anneau sera limité par deux cercles concentriques à CC. Le contour extérieur a pour rayon la somme des rayons r et R, et la limite intérieure a pour rayon leur différence $R - r$. Si $r = R$, la partie centrale obscure disparaît, et tout le cercle de rayon 2 R est éclairé ; enfin si $r > R$ toutes les ondes réfractées se couvrent sur un cercle de rayon $r - R$.

Pour nous faire une idée nette des rapports d'intensité et de polarisation des points de la seconde face frappée par la lumière réfractée, considérons d'abord le cas où la lumière incidente est polarisée en ligne droite.

Fig. 188.



Soit, figure 188, CC le lieu des centres des ondes réfractées. Des deux lignes que l'on peut mener parallèlement aux deux axes optiques par le centre de l'onde qui pénètre, l'une aboutit au point A_1 du cercle CC, la seconde au point A_2 de la ligne $A_1 O$. Soit enfin tt la direction des vibrations et a l'amplitude de l'onde incidente.

En appelant dx l'arc élémentaire dans le cercle de rayon 1, partageons l'onde incidente en $\frac{\pi}{dx}$ ondes partielles oscillant suivant tt et d'égale intensité ; leur amplitude sera $a \frac{dx}{\pi}$. Portons en outre sur la cir-

conférence CC les arcs oo', $o'o''$ etc. correspondants à l'élément dx, en partant du point o, choisi de manière que la ligne $A_1 o$ soit perpendiculaire sur tt.

Partageons les unes après les autres les ondes partielles ainsi obtenues en deux composantes polarisées à angle droit dont les directions de vibrations sont $A_1 o$, $A_1 o'$...... et les perpendiculaires $A_1 \omega$, $A_1 \omega'$...... Le couple de composantes dont les vibrations sont, par exemple, parallèles à $A_1 b$ et $A_1 \beta$ ont pour amplitudes :

$$\frac{a}{\pi} dx \text{ Cos. } A_1 lt, \qquad \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } A_1 lt.$$

Mais désignons l'azimuth oOb par δ, $oO\beta$ par δ', on peut écrire pour les amplitudes :

$$\frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \delta \qquad \text{et } \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \delta'$$

Ainsi en général l'amplitude de la vibration correspondante à l'azimuth δ est

$$\frac{a}{\pi} dx. \text{ Sin. } \tfrac{1}{2} \delta.$$

Les $\frac{2\pi}{dx}$ composantes en lesquelles l'onde incidente a été divisée se sépareront évidemment par la réfraction, de telle manière que chacune suivra le chemin qui correspond à sa direction de vibration. Par conséquent, d'après ce que nous avons vu, page 281, le centre de l'onde circulaire composante dont les vibrations sont parallèles à $A_1 b$, suit la route Ab (figure 187 combinée avec la figure 188), et quand cette composante est arrivée à la seconde face, son centre est en b. C'est ainsi que se distribuent symétriquement sur la circonférence CC, les ondes circulaires des composantes, et l'on obtient la direction de vibrations d'une d'entre elles, en joignant son centre au point A_1.

Considérons un point à volonté p de l'anneau lumineux en lequel se composent en général les ondes partielles, il est clair que sa lumière proviendra d'un nombre infini d'ondes. En effet, si $ps_1 = ps_2 = r$, p sera rencontré par toutes les ondes dont les centres sont sur l'arc $s_1 s_2$. La vibration en p sera donc la résultante des vibrations de toutes ces ondes, et nous trouverons sa grandeur et sa direction de la manière suivante :

Si n est le point de rencontre du cercle CC et du rayon Op, et si on pose $pOs_1 = pOs_2 = \varphi$, les vibrations des ondes qui passent au point p sont à droite et à gauche de pn dans les azimuths :

$$+\varphi, +(\varphi - dx), \ldots\ldots +dx, 0, -dx, \ldots\ldots, -(\varphi - dx), -\varphi,$$

ou dans les azimuths comptés à partir de oO :

$$\delta + \varphi, \ldots\ldots, \delta + dx, \delta, \delta - dx, \ldots\ldots \delta - \varphi$$

en posant $oOp = \delta$.

A ces azimuths correspondent donc les amplitudes :

$$\frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta + \varphi}{2} \ldots\ldots \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta + dx}{2}, \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta}{2},$$

$$\frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta - dx}{2} \ldots\ldots \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta - \varphi}{2}.$$

Chaque vibration sera divisée maintenant en deux composantes, dont l'une est dans la direction $A_1 n$ que nous appellerons *direction primitive de vibrations* du rayon On et de ses points, et l'autre lui est perpendiculaire. Nous obtenons ainsi les deux séries de vibrations :

$$1. \begin{cases} \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta + \varphi}{2} \text{ Cos. } \frac{\varphi}{2} \ldots\ldots \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta + dx}{2} \text{ Cos. } \frac{dx}{2}, \\ \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta}{2}, \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta - dx}{2} \text{ Cos. } \frac{dx}{2} \ldots\ldots \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta - \varphi}{2} \text{ Cos. } \frac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta + \varphi}{2} \text{ Sin. } \frac{\varphi}{2} \ldots\ldots \frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta + dx}{2} \text{ Sin. } \frac{dx}{2}, 0, \\ -\frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta - dx}{2} \text{ Sin. } \frac{dx}{2} \ldots\ldots -\frac{a}{\pi} dx \text{ Sin. } \frac{\delta - \varphi}{2} \text{ Sin. } \frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Chacune de ces deux séries se compose en une résultante. Représentons celles-ci respectivement par Y et X ; on a :

$$Y = \frac{a}{\pi} \int_{-\varphi}^{+\varphi} \text{Sin. } \frac{\delta + x}{2} \text{ Cos. } \frac{x}{2} dx = \frac{a}{\pi} \text{ Sin. } \frac{\delta}{2} (\varphi + \text{Sin. } \varphi)$$

$$X = \frac{a}{\pi} \int_{-\varphi}^{+\varphi} \text{Sin. } \frac{\delta + x}{2} \text{ Sin. } \frac{x}{2} dx = \frac{a}{\pi} \text{ Cos. } \frac{\delta}{2} (\varphi - \text{Sin. } \varphi)$$

Quant à l'angle φ qui entre dans ces expressions, on a, si on fait $Op = \rho$

$$\varphi = \text{arc Cos. } \frac{R^2 - r^2 + \rho^2}{2 R \rho}$$

Les trois dernières formules comprennent la détermination complète des rapports d'intensité et de polarisation du cercle lumineux. Représentons donc l'intensité du point p par J et par ψ l'angle que sa direction réelle de vibrations fait avec la direction primitive $A_1 n$, on a :

$$J = X^2 + Y^2 = \frac{a^2}{\pi^2} (\varphi^2 + \text{Sin.}^2 \varphi - 2 \varphi \text{ Sin. } \varphi \text{ Cos. } \delta) \text{ et}$$

$$\text{Tang. } \psi = \frac{X}{Y} = \text{Cotg. } \frac{\delta}{2} \frac{\varphi - \text{Sin. } \varphi}{\varphi + \text{Sin. } \varphi}$$

Interprétons maintenant les résultats obtenus.

1) Soit $r < R$, de manière qu'il se forme un anneau lumineux. La valeur de φ, qui sera la même pour chaque cercle concentrique à l'anneau, est égale à 0 à la limite interne de ce dernier. Si, partant de ce cercle intérieur, nous allons vers la partie externe, φ augmente et atteint une valeur maximum pour une distance au centre moindre que R et qu'on peut facilement déduire de l'expression de φ. Puis φ diminue de nouveau et devient nul une seconde fois à la limite externe de l'anneau.

L'intensité éprouve la même variation que l'angle φ pour une seule et même valeur de δ, ainsi pour un seul et même rayon. Mais pour un seul et même cercle, l'intensité augmente avec δ des deux côtés de o d'une manière continue et égale. Sa plus petite valeur sur le rayon Oo est $\frac{a^2}{\pi^2}(\varphi - \text{Sin. } \varphi)^2$ et sa plus grande sur le prolongement ωO est $\frac{a^2}{\pi^2}(\varphi + \text{Sin. } \varphi)^2$.

L'inclinaison de la direction des vibrations réelles avec la direction primitive diminue graduellement du rayon Oo, où elle est $\frac{\pi}{2}$, au rayon Oω où elle est nulle. Le sens de l'inclinaison d'un côté de o est contraire à celui de l'autre côté. Mais le changement de sa valeur absolue est le même des deux côtés.

2) r et R devenant égaux, la partie centrale obscure de l'anneau disparaît, et nous obtenons un cercle complétement éclairé. Son centre passe par les bords de toutes les ondes partielles et celles-ci se composent en une lumière qui se confond avec la lumière incidente par son intensité et la direction de ses vibrations. Cela se reconnaît *à priori* et résulte aussi de nos formules. En effet pour le centre il faut poser évidemment $\varphi = \pi$, bien que l'expression de φ se rapproche de $\frac{1}{2}\pi$ à mesure que ρ décroît. Ceci provient de ce que cette expression n'est applicable que tant que le cercle décrit de p comme centre avec r pour rayon, coupe le cercle CC en deux points déterminés s_1 et s_2, ce qui n'est plus le cas ici puisque ces cercles se confondent. Pour $\varphi = \pi$ on aura $J = a^2$.

L'angle δ peut évidemment être pris à volonté, et par conséquent pour chaque δ on aura :

$$\psi = 90^\circ - \frac{\delta}{2}.$$

C'est-à-dire que la direction des vibrations se confond avec tt.

Du centre à un point quelconque voisin, il y a un saut brusque dans l'intensité, comme dans la direction des vibrations.

A partir des points voisins du centre vers l'extérieur, l'intensité diminue graduellement et à la fin disparaît.

3) Si $r > R$, toutes les ondes partielles se couvrent sur un cercle concentrique à CC de rayon $r - R$. Pour les points de ce cercle $\varphi = \pi$ et par conséquent l'intensité et la polarisation sont les mêmes que dans la lumière incidente.

Ici, contrairement au cas précédent, la valeur de φ diminue d'une manière continue de la circonférence du cercle central jusqu'à l'extérieur, depuis la valeur π jusqu'à 0. Il y a dès lors aussi un passage continu de l'intensité a^2 à l'intensité 0, de même qu'il y en a un tout le long d'un même rayon, de la direction des vibrations de la lumière incidente, aux directions primitives des vibrations sur la limite extérieure du cercle lumineux.

D'après ce qui précède il est facile de résoudre la question dans le cas où la lumière incidente n'est pas polarisée. Nous obtiendrons les phénomènes relatifs à ce cas, en faisant passer la direction des oscillations *tt* par tous les azimuths dans un temps très-court.

Pour un point déterminé p, δ n'est plus constant ; il prend pendant un temps très-court toutes les valeurs depuis $+\pi$ jusqu'à $-\pi$. Au point p il y a donc dans ce temps un nombre infiniment grand de vibrations qui se décomposent en les couples suivants de composantes :

$$Y = \frac{a}{\pi}(\varphi + \text{Sin.}\,\varphi),\ X = 0;\ Y = \frac{a}{\pi}\ \text{Sin.}\ \frac{\pi + d\delta}{2}\,(\varphi + \text{Sin.}\,\varphi),$$

$$X = \frac{a}{\pi}\ \text{Cos.}\ \frac{\pi + d\delta}{2}\,(\varphi - \text{Sin.}\,\varphi);$$

. . . .

$$Y = -\frac{a}{\pi}\ \text{Sin.}\frac{\pi - d\delta}{2}\,(\varphi + \text{Sin.}\,\varphi),\ X = \frac{a}{\pi}\ \text{Cos.}\ \frac{\pi - d\delta}{2}\,(\varphi - \text{Sin.}\,\varphi);$$

$$Y = -\frac{a}{\pi}\,(\varphi + \text{Sin.}\,\varphi),\ X = 0.$$

Evidemment ces couples de composantes divisées suivant le temps, prises dans leur ensemble, se composent en lumière partiellement polarisée. Pour celle-ci nous pouvons poser deux séries de vibrations, dont l'une sera formée des composantes Y, l'autre des composantes X. La première forme un rayon y vibrant rectilignement suivant la direction primitive de vibrations, la seconde un rayon x polarisée perpendiculairement sur celui-là. Si nous supposons que a^2 soit l'intensité de la lumière naturelle incidente, celles des rayons y et x seront respectivement $\frac{a^2}{2\,\pi^2}\,(\varphi + \text{Sin.}\,\varphi)^2$, $\frac{a^2}{2\,\pi^2}\,(\varphi - \text{Sin.}\,\varphi)^2$. Mais nous

pouvons aussi en second lieu, remplacer la lumière partiellement polarisée par un rayon de lumière naturelle d'intensité $\frac{a^2}{\pi^2}(\varphi - \text{Sin.}\ \varphi)^2$, et un rayon de lumière polarisée en ligne droite, dont les vibrations sont dans la direction primitive de vibrations et dont l'intensité est $\frac{2\ a^2}{\pi^2}\varphi\ \text{Sin.}\ \varphi$. La mesure de la polarisation partielle (le rapport de l'intensité de la lumière polarisée à celle de la lumière naturelle) est :

$$\frac{2\ \varphi\ \text{Sin.}\ \varphi}{(\varphi - \text{Sin.}\ \varphi)^2} = \frac{1}{\frac{\varphi}{2\ \text{Sin}\ \varphi} - 1 + \frac{\text{Sin.}\ \varphi}{2\ \varphi}}$$

Enfin pour l'intensité totale on obtient la valeur :

$$J = \frac{a^2}{\pi^2}(\varphi^2 + \text{Sin.}^2\ \varphi).$$

Nous voyons d'après cela que, quelle que soit la forme de la partie éclairée de la seconde surface, en tous les points d'un cercle concentrique à CC on aura la même lumière. Et suivant que $r < R$, $r = R$, $r > R$ l'éclat, sur le même rayon, diminue d'une manière continue ou vers les deux bords, ou bien du centre vers le bord extérieur, ou enfin de la circonférence du cercle du rayon $r - R$ vers l'extérieur.

La lumière est partiellement polarisée et ses vibrations dominantes sont dans la direction primitive des vibrations, de sorte que les vibrations de tous les points d'un rayon sont parallèles à la ligne qui joint l'intersection du rayon et du cercle CC avec le point A_1.

La mesure de la polarisation partielle suit presque la même marche que l'intensité. Vers le bord externe et, si $r < R$, vers le bord interne, la polarisation partielle se rapproche graduellement de la polarisation complète et l'atteint entièrement sur ces bords. Mais si $r = R$ ou $r > R$ la lumière du point central ou celle du cercle intérieur de rayon $r - R$, est constituée tout à fait comme la lumière incidente, par conséquent d'un éclat uniforme et non polarisée. Dans le premier de ces cas ($r = R$) il y a dans l'intensité et la polarisation un saut brusque du centre aux points voisins. Mais dans le second cas ($r > R$) du bord du cercle de rayon $r - R$, aux limites extérieures de la partie lumineuse, l'éclat d'intensité a^2 se change en obscurité, et de l'absence de toute polarisation, on passe graduellement par tous les degrés de polarisation partielle jusqu'à la polarisation rectiligne complète.

Les données exactes que la théorie nous a fournies dans ce qui précède, n'ont pas encore été vérifiées par l'expérience dans toutes leurs particularités.

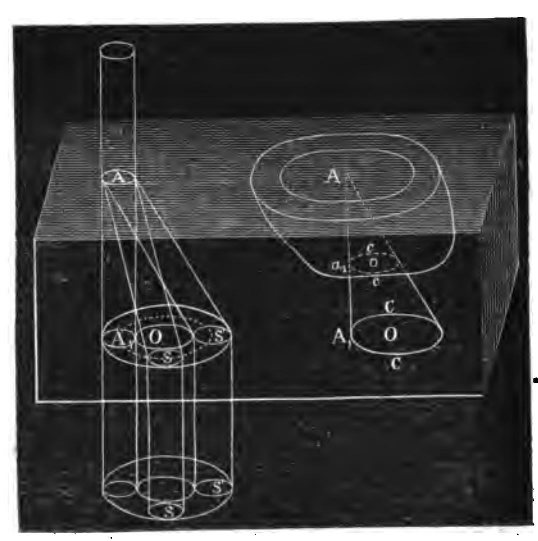
Nous signalerons aussi la simplification que l'on peut faire, si, comme dans les cas examinés jusqu'à présent, le rayon r n'a pas une valeur importante par rapport à R. On obtient alors un anneau lumineux et, comme il est facile de le voir par ce qui précède, on peut admettre sans erreur sensible que, si la lumière incidente est polarisée, les vibrations sont exactement dans le plan primitif des vibrations, et que l'intensité s'annule complétement sur le rayon O*o*, qui fait avec A_1O un angle deux fois plus grand qu'avec *tt*.

Si en second lieu la lumière incidente n'est pas polarisée, on peut aussi, sans erreur sensible, négliger entièrement la lumière naturelle qui se mêle en général à la lumière polarisée.

Ayant suivi les ondes réfractées dans l'intérieur du cristal jusqu'à la seconde surface, nous allons voir maintenant comment elles repassent dans le milieu isotrope, où l'on pourra de nouveau les observer. Chaque onde pénètre dans le milieu mono-réfringent au point où elle rencontre la seconde surface, et reprend sa vitesse initiale, en même temps que chaque point de sa limite, qui du reste ne change pas de forme, s'avance suivant une ligne perpendiculaire à l'onde.

Représentons-nous le cas intéressant où la seconde face est éclairée sur un espace annulaire (figure 189); alors les ondes deux fois réfractées se compo-

Fig 189.



sent en une onde annulaire qui, en tous points, coïncide avec l'anneau lumineux en question. De la plaque sort donc un faisceau de rayons limité par deux cylindres de révolution dont les axes sont communs et qui reposent sur les limites interne et externe de l'anneau. L'épaisseur du faisceau cylindrique creux est égale à celle du faisceau incident et son diamètre moyen est celui du cercle CC. Nous distinguerons dans ce faisceau, comme plan remarquable, la section menée par l'axe parallèlement aux axes optiques, et comme arête remarquable de son cylindre moyen (celui qui repose sur CC) celle qui coïncide avec la direction de l'axe optique AA_1. Le plan remarquable partage le faisceau en deux moitiés qui sont symétriques quant à ce qui regarde la polarisation. Si nous menons par l'arête remarquable et par une seconde arête ss du cylindre moyen, un plan S et par cette dernière ss et l'axe, un autre plan E, les vibrations de tous les rayons qui sont dans E sont parallèles au plan S. Sur l'arête remarquable elle-même les vibrations sont perpendiculaires à la section remarquable ; elles s'inclinent de plus en plus sur cette section à mesure qu'on s'avance sur la circonférence du cylindre moyen en partant de l'arête principale et elles s'inclinent avec une vitesse angulaire moitié de celle avec laquelle on avance. En effet est-on arrivé en s', on a décrit l'angle sOs', les vibrations ont tourné de l'angle sA_1s', mais sOs' est double de sA_1s'. Si l'on arrive à l'arête diamétralement opposée à l'arête remarquable, si l'on a par conséquent avancé de 180°, les vibrations sont dans la section remarquable et ont par conséquent tourné de 90°.

Cette espèce particulière de réfraction que nous venons d'étudier, fut reconnue par le professeur Hamilton comme une conséquence nécessaire de la forme qui caractérise la surface de l'onde d'un cristal à deux axes, et fut désignée du nom de *réfraction conique intérieure*. A la demande d'Hamilton le physicien anglais Lloyd entreprit d'en démontrer expérimentalement l'existence, ce à quoi il réussit. Dans cette prédiction du calcul vérifiée *a posteriori*, on a vu avec raison une preuve des plus convaincantes de l'exactitude de la théorie : cette dernière n'a pas seulement expliqué les faits déjà connus, mais encore elle a conduit à en découvrir de nouveaux.

L'arragonite se prête fort bien à l'observation de la réfraction conique ; c'est de ce cristal que s'est servi Lloyd dans ses recherches, que nous citerons plus tard, parce que les choses ne s'y passent pas aussi simplement que dans les cas que nous avons examinés. L'arragonite appartenant au système isoklinique, cristallise en prismes rhombiques mm' (figure 190), avec des angles de 116° 16' et de 63° 44'. Les cristaux portent un biseau sur la base par les faces gg' qui tronquent les angles trièdres aigus du prisme. La face k_i qui est la face de clivage, coupe les angles dièdres aigus du prisme.

Dans l'arragonite l'axe du prisme *mm'* est la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques et la grande diagonale de la base est la bissectrice de l'angle obtus. Les axes optiques font un angle d'environ 20°. Si donc on taille dans l'arragonite deux faces formant avec les faces *k* un angle de 100°, la plaque qui en résulte est sensiblement perpendiculaire à l'un des axes optiques. On a soin de lui laisser une grande épaisseur et en l'introduisant dans l'instrument représenté figure 191, on peut facilement observer la réfraction conique comme nous allons le dire. La plaque est enchâssée dans du liége fixé dans la douille *h*. Celle-ci tourne autour de son axe dans le cylindre *cc* et ce dernier, au moyen du bouton S, peut tourner autour d'un axe qui traverse perpendiculairement à l'axe le cylindre CC contenant les pièces précédentes. Le cylindre CC porte à l'une de ses extrémités la plaque métallique PP avec une ouverture *pp*, derrière laquelle est fixée une feuille d'étain percée dans l'axe de l'instrument d'un trou fait avec une aiguille fine. A l'autre bout du cylindre CC est un tube contenant une lentille et un trou oculaire. La lentille est disposée de telle manière qu'en regardant vers une source de lumière (le ciel ou une lampe), les deux images du trou de la lame d'étain, formées par la double réfraction de l'arragonite, soient vues nettement. En tournant la douille *h* dans le cylindre *cc*, on arrivera facilement à faire qu'en tournant le bouton S aucune des images ne sorte du plan perpendiculaire à l'axe de S; ce plan se confond alors avec celui des axes optiques. Quand on y est parvenu, au moins approximativement, en employant le bouton et en dirigeant convenablement l'instrument, on arrive bientôt à rapprocher les deux images, au moment où l'on croit qu'elles vont se couvrir; alors on obtient un petit anneau brillant (figure 192, 1), qui est produit par les ondes annulaires, par le faisceau lumineux cylindrique et creux, en lequel se changent, par la réfraction conique, les rayons incidents qui pénètrent par la petite ouverture de la feuille d'étain. Un peu avant de se mêler en un anneau lumineux, les deux images prennent les formes de ménisque, représentées dans la figure 192, 2, et présentent dans la direction de la section principale des axes optiques les couleurs de la

Fig. 190.

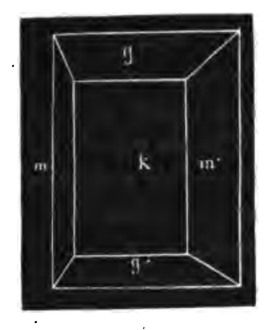
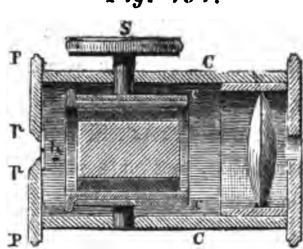
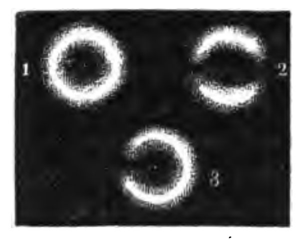


Fig. 191.



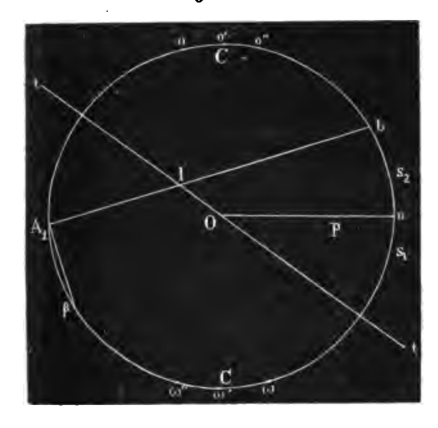
dispersion quand on emploie de la lumière blanche. Mais ces couleurs disparaissent quand la lumière forme l'anneau complet.

Fig. 192.



Si l'on interpose entre l'œil et l'oculaire de l'instrument un prisme de Nicol, on peut toujours observer l'anneau et on peut en outre étudier sa polarisation. On s'apercevra alors (figure 192, 3), que des deux extrémités d'un certain diamètre de l'anneau, une est complétement obscure tandis que l'autre a un maximum d'éclat et qu'à partir de ce dernier point, l'éclat diminue graduellement de la même manière des deux côtés jusqu'à l'autre point. Quant à la position de ce diamètre, il se confond avec la direction des vibrations dans le prisme, quand celle-ci tombe dans le plan des axes optiques, et alors l'extrémité obscure du diamètre est sur l'arête remarquable du faisceau cylindrique, par conséquent au point d'émergence de l'axe optique normal à la plaque, tandis que l'extrémité lumineuse ne se confond ni avec la bissectrice ni avec le second axe optique. Si l'on tourne le prisme de Nicol autour de son axe à droite ou à gauche, le diamètre en question tourne dans le même sens, mais avec une vitesse angulaire double de celle du prisme, d'après quoi la position du diamètre sera déterminée sitôt que le plan des vibrations sera donné dans le polarisateur.

Fig. 193.



Toutes ces apparences s'expliquent complétement d'après les rapports de polarisation que nous avons indiqués dans le faisceau creux. En effet, soit dans la figure 193, CC une section de son cylindre moyen perpendiculairement à l'axe, A_1 le point d'émergence de son arête remarquable, et *tt* la direction des vibrations du polarisateur. Si $A_1 o$ est perpendiculaire sur *tt* et que $A\,\omega$ lui soit parallèle, il est évident que le rayon passant en ω, dont la direction des vibrations est $A\,\omega$, ne sera pas affaibli par le polarisateur, tandis qu'au contraire celui qui passe en *o*, qui vibre

suivant A_1o perpendiculairement à tt, sera complétement éteint. Tout autre rayon dont la direction des vibrations sera plus ou moins inclinée sur tt, sera plus ou moins affaibli. Ainsi pour le point b, la direction des vibrations est A_1b. Soit a l'amplitude de la lumière. La vibration en b peut se décomposer en deux dont l'une est parallèle à A_1o, l'autre à $A_1\omega$. Celle-là a pour amplitude a Cos. $bA_1o = a$ Cos. $\frac{1}{2}\, bOo$, et est complétement détruite par le polarisateur. La seconde a pour amplitude a Sin. $bA_1o = a$ Sin. $\frac{1}{2}\, bOo$, et passe par le polarisateur sans être affaiblie. Pour l'intensité en un point quelconque π nous aurons donc : a^2 Sin^2 $\frac{1}{2}\, bOo$, et l'on voit d'après cela qu'en partant du point o où elle est nulle, elle diminue graduellement de la même manière des deux côtés sur le contour de l'anneau, qu'enfin au point ω, diamétralement opposé à o, elle atteint sa valeur maximum a^2.

Le diamètre $o\omega$ qui partage ainsi l'anneau lumineux en deux parties symétriques forme, avec le plan des axes optiques ou sa trace A_1OA_2 l'angle A_1Oo double de l'angle A_1Ot formé par la direction des vibrations du polarisateur et la ligne A_1O. Si nous tournons celui-ci uniformément autour de son axe, le diamètre $o\omega$ se meut aussi uniformément dans le même sens, autour du point O, mais avec une vitesse angulaire toujours double. Chaque fois que tt coïncide avec A_1O, le point obscur et le point lumineux ont parcouru tout le contour de l'anneau, et le premier est en A_1. Si l'on polarise la lumière avant son entrée dans le cristal, l'anneau lumineux présente les mêmes phénomènes que dans le cas précédent. En effet cela doit encore arriver dans les limites que nous avons posées, car, ainsi que nous l'avons vu page 310, si la lumière incidente est polarisée, il y a obscurité à l'extrémité du rayon qui fait avec A_1O un angle double de celui formé par la direction des vibrations du rayon incident, et l'intensité augmente des deux côtés comme Sin.$^2 \dfrac{1}{2}\,\delta$. L'apparence de l'anneau aussi bien que ses changements par la rotation du polarisateur, seront les mêmes que si on fait passer à travers un polarisateur la lumière qui sort du cristal.

Dans les recherches que Lloyd entreprit pour découvrir la réfraction conique intérieure, il se servit d'une plaque d'arragonite dont les faces n'étaient pas perpendiculaires à un des axes optiques, mais à la bissectrice de l'angle de ces axes. Il devait donc faire arriver la lumière obliquement dans le plan des axes optiques (voyez page 299). Dès lors le cône des rayons réfractés n'était pas coupé par la seconde surface suivant un cercle, mais suivant une ellipse, et le faisceau lumineux creux émergent n'était pas un cylindre de révolution, mais un cylindre elliptique. L'excentricité de ce cylindre était

du reste fort petite, comme aussi celle du cône lumineux et échappait à l'observation. En effet, Lloyd, après s'être convaincu en employant la lumière d'une lampe de l'existence de l'anneau lumineux, fit tomber obliquement un rayon du soleil sur le cristal recouvert d'une mince feuille de métal percée, et reçut normalement la lumière émergente sur un écran de papier d'argent. Là apparut un anneau lumineux peu différent d'un cercle, et en inclinant l'écran, il conservait toujours les mêmes diamètres extérieur et intérieur. Cela prouve que le faisceau lumineux était réellement cylindrique.

Lloyd détermina le diamètre moyen de l'anneau lumineux, de même que l'épaisseur du cristal dans la direction de l'axe optique, il en déduisit pour l'ouverture du cône des rayons, un angle de 1° 50'. Ce résultat est une nouvelle preuve en faveur de la théorie, car celle-ci permet de calculer l'angle du cône. Revenons en effet à la notation de la page 304, φ étant l'ouverture du cône dans le plan des axes optiques, on a :

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{2\,\text{OA}_{\prime}}{\text{D}}, = \frac{1}{b^2}\sqrt{(b^2 - a^2)\,(c^2 - b^2)}$$

Maintenant Rudberg a déterminé pour l'arragonite, comme pour la topaze, les indices de réfraction des rayons qui sont dans une des sections principales et dont les vibrations sont perpendiculaires à cette section. Représentons par α, β, γ ces trois grandeurs pour les rayons de réfrangibilité moyenne (par exemple les rayons E), on aura d'après Rudberg :

$$\alpha = 1{,}69084 \qquad \beta = 1{,}68634 \qquad \gamma = 1{,}53264.$$

Mais v étant la vitesse de la lumière dans l'air on a :

$$a = \frac{v}{\alpha}, \qquad b = \frac{v}{\beta}, \qquad c = \frac{v}{\gamma}$$

Nous obtiendrons pour déterminer φ l'équation :

$$\text{Tang. } \varphi = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right)}}{\frac{1}{\beta^2}} = \frac{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)\,(\beta^2 - \gamma^2)}}{\alpha\gamma}$$

d'où l'on déduit :

$$\varphi = 1^\circ\ 55'$$

valeur qui ne diffère de celle observée que de 5', quantité insignifiante. Cet accord entre la théorie et l'observation est d'autant plus satisfaisant, que la valeur calculée de φ est entachée des erreurs qui portent sur les calculs de

α, β, γ. La réfraction conique intérieure peut s'observer aussi facilement que dans l'arragonite, dans une plaque de bichromate de potasse, parallèle à la face de clivage, laquelle est presque perpendiculaire à l'un des axes optiques.

L'angle représenté plus haut par φ n'a dans la topaze qu'une valeur d'environ 16′, c'est pourquoi la réfraction conique ne peut s'y observer facilement. Il est plus grand dans le salpêtre, d'après les mesures de Miller, car il est égal à 50′ 48″, et dans ce sel, l'auteur croit avoir vu aussi l'anneau lumineux. Dans l'anhydrite sa valeur est 59′ 20″ calculée d'après les indices de Miller. L'arragonite, la topaze, le salpêtre, sont les seuls cristaux à deux axes dont nous possédions les trois indices de réfraction.

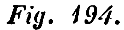
Si la plaque cristalline est mince et l'onde incidente étendue, la réfraction conique peut n'être plus sensible. Les composantes se couvrent pour la plupart, et quand cela arrive, elles se combinent de nouveau en une lumière dont la polarisation coïncide exactement avec celle de la lumière incidente. Par rapport aux ondes plus étendues le cristal à deux axes se comporte donc suivant la direction des axes optiques comme un milieu monoréfringent, abstraction faite ici des bords de l'onde (1).

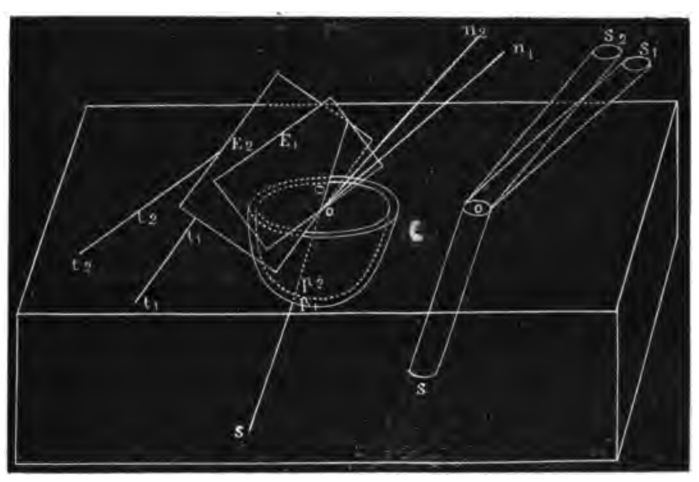
Réfraction conique extérieure. — Au problème ayant pour but de trouver les deux rayons réfractés en lesquels se divise un rayon incident en passant d'un milieu isotrope dans un milieu bi-réfringent, correspond par l'échange des milieux le problème suivant : étant donné deux rayons, qui dans un milieu bi-réfringent se propagent suivant la même direction et sont limités par le même cylindre, et pénètrent ensuite par une surface plane de séparation dans un milieu isotrope, trouver les rayons en lesquels se divise ce rayon composé ? Nous nous contenterons de donner sans démonstration la construction qui fournit les deux rayons cherchés ; son exactitude est évidente sans qu'il soit nécessaire de rien ajouter.

Soit *so* (figure 194) la direction du double rayon donné. Autour de o comme centre, construisons la surface de l'onde du milieu cristallin. Elle sera rencontrée par *so* en deux points p_1 et p_2. Par ces points menons à la surface deux plans tangents qui coupent la surface réfringente suivant deux lignes, soit $t_1\,t_1$ et $t_2\,t_2$. Décrivons maintenant autour de t_1 et t_2 comme axes deux cylindres de révolution, dont les rayons sont égaux à la vitesse de la lumière dans le milieu isotrope, et menons enfin à ces cylindres par le point o, dans le

(1) On trouve quelques nouvelles particularités sur la réfraction conique dans le mémoire de l'auteur intitulé : *Détermination des rapports d'intensité et de polarisation de l'anneau lumineux produit par la réfraction conique.* Ann. Pogg. LXXXV.

milieu isotrope deux plans tangents E_1 et E_2 ; ceux-ci sont les ondes des rayons cherchés. Pour obtenir ces derniers eux-mêmes, nous n'avons qu'à





construire deux cylindres, perpendiculaires aux ondes planes trouvées, et qui passent par la ligne suivant laquelle la face réfringente est rencontrée par la surface limite du double rayon. Ces cylindres limitent les rayons réfractés. En général on en obtient deux. Mais de même qu'au passage d'une onde d'un milieu isotrope dans un cristal, celle-ci se partage en un nombre indéfini d'ondes réfractées, quand le plan tangent mené à la surface de l'onde devient un plan tangent singulier; de même, dans le problème qui nous occupe, nous aurons un nombre indéfini de rayons réfractés quand la ligne *so* rencontrera la surface de l'onde en un point singulier. Alors *so* sera parallèle à un axe optique secondaire, tandis que plus haut la normale des ondes réfractées est parallèle à un axe optique réel.

Nous allons examiner de plus près ce cas extraordinaire, qui se réalise dans la *réfraction conique extérieure,* ainsi que l'appelle Hamilton, en admettant pour simplifier que l'axe optique secondaire est perpendiculaire à la face réfringente. Soit dans la figure 195 (1) A_1A_2 l'intersection de la face réfringente et du plan des axes optiques; 𝔈, 𝔎 la section principale de la surface

(1) Dans cette figure, on a, pour plus de clarté, séparé la figure de la section principale 𝔈 𝔎, la construction des rayons réfractés, et la construction du faisceau réfracté.

de l'onde, qui coincide avec ce plan, en sorte que *os* est parallèle à *o's'*. Menons maintenant en *s* à la surface de l'onde des plans tangents; ceux-ci,

Fig. 195.



comme nous l'avons vu page 288, enveloppent un cône du second degré. Son sommet est en *s*, une de ses sections principales coïncide avec le plan des axes optiques, et des deux lignes droites de cette section, l'une, celle qui est tangente au cercle 𝔎, est parallèle à la face réfringente. Le cône coupe donc cette dernière suivant une parabole PP, dont l'axe est A_1A_2, et dont on obtient le sommet en prolongeant la tangente à l'ellipse 𝔈 au point *s*, jusqu'à sa rencontre avec la face réfringente. Menons par le point *s* et une tangente *tt* à cette parabole un plan, il sera évidemment tangent à la surface de l'onde. Pour obtenir maintenant un des rayons, menons, comme l'indique la construction générale, autour de la tangente *tt* à la parabole un cylindre de révolution de rayon *v*, *v* étant la vitesse de la lumière dans le milieu isotrope, qui sera l'air par exemple. Le plan tangent $o\tau\tau$ au cylindre est alors l'onde réfractée qui correspond à l'onde *tts* dans le cristal. Soient O*n*, et *on'* les normales aux ondes *tts*, et $\tau\tau o$; elles sont avec la normale *op* au point d'incidence dans un même plan. Les normales seront rencontrées en *n* et en *n'* par un plan mené par *p* parallèlement à la face réfringente; et l'on aura, si *v'* est la vitesse de l'onde *tts* dans le cristal :

$$\text{Sin. } pon' : \text{Sin. } pon = v : v' \text{ et approximativement :}$$

$$\text{Sin. } pon' : \text{Sin. } pon = pn' : pn \text{ d'où } pn' : pn = v\, v'.$$

On remarque en outre que les normales *on* à chaque onde des rayons *so*, forment le cône supplémentaire K' du cône K. Une arête de ce cône est *sp*, une de ses sections principales est le plan des axes optiques, et il est coupé suivant un cercle *k*, par un plan passant par *p* (voyez page 293). On voit enfin de plus que la valeur de *v'* change, il est vrai, d'un plan tangent en *s* à

un autre, mais que cette variation dans chaque cas est très-petite, et que par conséquent sans erreur sensible on peut regarder le rapport $\frac{v}{v'}$ comme constant et dès lors aussi le rapport $\frac{pn'}{pn}$. Il en résulte donc que les points n' sont sur une circonférence et que les normales aux ondes réfractées forment un cône du second degré, qui dans ses propriétés générales coïncide avec le cône K' (1). Le faisceau lumineux *so* s'étale donc aussi dans le cas de la réfraction conique extérieure en un cône, qui n'est plus alors dans le milieu doublement réfringent, mais dans le milieu isotrope; c'est à cause de cette forme conique du faisceau émergent qu'on a désigné le phénomène du nom que nous lui avons conservé. Si la limite de *so* est un cylindre de rotation dont l'axe est *so*, un écran placé parallèlement à la face réfringente sera rencontré par chaque rayon réfracté suivant un cercle. Les centres de tous ces cercles seront à leur tour sur un nouveau cercle, à savoir la ligne suivant laquelle le cône *pon'* coupe le plan de l'écran. Si l'écran est à une distance suffisante du cristal, il est éclairé sur la surface d'un anneau. Cet anneau se resserre sans changer d'épaisseur, si l'écran se rapproche du cristal. Enfin l'espace central obscur de l'anneau disparaît et aussi la forme annulaire; puis, en se rapprochant davantage du cristal, le cercle lumineux qu'on voit sur l'écran se rétrécit de plus en plus, et finit, quand l'écran touche la face réfractante, par se confondre avec le cercle suivant lequel cette face est frappée par le faisceau lumineux émergent.

A cause de la faible ouverture qu'a réellement le cône lumineux, on peut le considérer comme un cône de révolution et admettre aussi que les sections faites dans chaque rayon réfracté par un écran perpendiculaire à l'axe du cône sont des cercles tout à fait égaux. Cela admis, cherchons à déterminer la distance de l'écran au sommet du cône *o*, pour laquelle le vide de l'anneau lumineux se réduit à un point. Soit D la distance cherchée, φ l'ouverture du cône, r le rayon du cylindre de chaque rayon réfracté. Le cercle moyen de l'anneau lumineux a en général pour rayon :

$$R = D \text{ tang. } \frac{\varphi}{2}.$$

Le cercle intérieur de l'anneau se réduit évidemment à un point, quand R devient égal à r, on a alors :

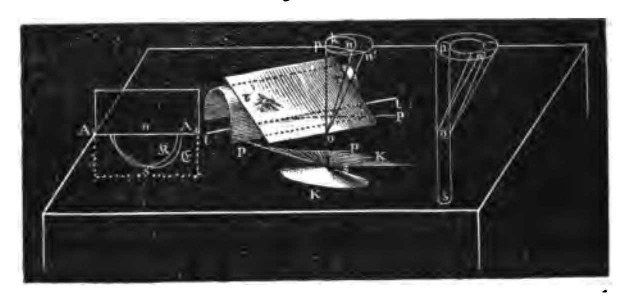
(1) En tenant compte de la variation de v', on trouve pour le lieu des normales *on'* un cône du 4[e] degré.

$$D = \frac{r}{\text{tang.} \frac{\varphi}{2}}$$

Représentons par ρ le rayon jusqu'à la limite extérieure, $r = \frac{1}{2}\rho$ par conséquent $D = \frac{\rho}{2 \text{ tang.} \frac{\varphi}{2}}$ d'où l'on déduit aussi :

$$\varphi = 2 \text{ arc. tang.} \frac{\rho}{2D}.$$

Fig. 196.

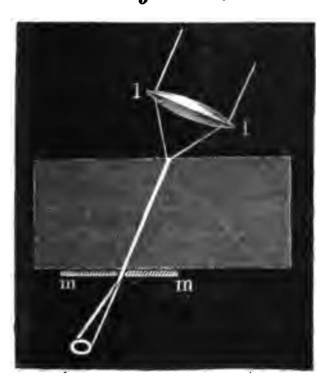


Il reste encore à trouver les rapports de polarisation du cône lumineux. Le plan des vibrations d'une onde dans le cristal passe par l'axe secondaire *so* et la normale à cette onde. Comme ces deux lignes sont dans le plan d'incidence, les vibrations sont aussi parallèles à celui-ci, et il en résulte que les vibrations de l'onde réfractée se trouvent également dans le plan d'incidence. Menons donc un plan par *op* et l'axe *on'* d'un rayon réfracté, il sera le plan des vibrations du rayon. Il est évident qu'il y a analogie complète entre les rapports de polarisation du faisceau cylindrique dans la réfraction conique intérieure et ceux du cône de rayons dans la réfraction conique extérieure. A l'arête remarquable du premier qui était parallèle à un axe optique, correspond ici l'arête *op* qui est parallèle à un axe optique secondaire ; pour les deux, le plan des axes optiques est une section remarquable. Aussi ne ferions-nous que nous répéter, si nous voulions nous étendre davantage sur les rapports de polarisation de l'anneau lumineux dans la réfraction conique extérieure.

Pour pouvoir mettre mieux en évidence la réfraction conique extérieure, nous allons supposer que des rayons de lumière non polarisée coïncidant en

direction et en limite avec les rayons tels que *on'*, passent du milieu isotrope dans le milieu à deux axes. Ces différents rayons se divisent chacun en deux rayons réfractés, dont l'un coïncide avec le rayon *so* et l'autre suit une autre route. Tous ceux qui coïncident avec *so* forment un rayon composé, analogue à celui que nous avons supposé plus haut, les autres se réunissent en un cône autour de *so*. Limitons le cristal par une seconde face parallèle à la première et couvrons celle-ci d'une lame métallique qui ne laisse sortir que le rayon composé par une ouverture circulaire; alors celui-ci s'étend en un cône lumineux qui, abstraction faite de la position absolue, coïncide en tout avec le cône dont nous avons parlé plus haut. Cela nous indique la marche à suivre pour pouvoir observer la réfraction conique extérieure. Nous ferons tomber sur le cristal des rayons de lumière naturelle, convergents en un point de la première face, et nous ne laisserons sortir par la seconde que les rayons réfractés dans la direction de l'axe optique secondaire. Toutefois nous ne pouvons remplir cette dernière condition que d'une manière approchée. En effet, en recouvrant la seconde face du cristal avec une lame métallique percée, dont nous déplacerons l'ouverture jusqu'à ce que la ligne, qui joint son milieu au point de convergence des rayons incidents, coïncide avec l'axe secondaire optique, il ne sortira pas seulement par le trou de la plaque que les rayons qui suivent la direction de l'axe optique, mais encore, puisque le cône de rayons incidents est tout rempli, et dans tous les cas plus gros que le cône considéré plus haut, il sortira des rayons situés dans le voisinage des axes optiques, dont quelques-uns rencontrent l'ouverture. Le cône lumineux qui sort alors du cristal, n'est donc plus formé de faisceaux de rayons parallèles, mais bien de faisceaux de rayons divergents. Toutefois cette circonstance ne modifie pas le phénomène d'une manière sensible, comme le prouvent les conséquences des expériences de Lloyd.

Fig. 197.



Lorsque Lloyd voulut démontrer le fait de la réfraction conique extérieure, il se servit du même cristal d'arragonite dont il avait fait usage pour la réfraction conique intérieure. Au moyen d'une lentille *ll* il rendait les rayons du soleil convergents vers un point de la première face, et il faisait glisser sur la seconde une lame métallique *mm* percée d'une très-petite ouverture circulaire. Pour une certaine position, le pinceau lumineux sortant du cristal pré-

sentait la forme d'un cône lumineux ayant les propriétés décrites plus haut.

Le cône lumineux s'écarte aussi fort peu, ici, d'un cône de révolution. Les trois méthodes différentes dont s'est servi Lloyd pour mesurer son ouverture donnent des résultats tout à fait concordants. La plus simple peut trouver place ici. Lloyd recevait le cône lumineux sur un écran en verre dépoli, et mettait celui-ci dans une position telle que l'intérieur de l'anneau lumineux dessiné sur l'écran se réduisît à un point : puis il mesurait la distance de l'écran au cristal et le diamètre de l'anneau. Représentons la première par D et le second par 2ρ : on aura (page 320).

$$\frac{2\rho}{D} = \text{tang. } 6^\circ\ 14'$$

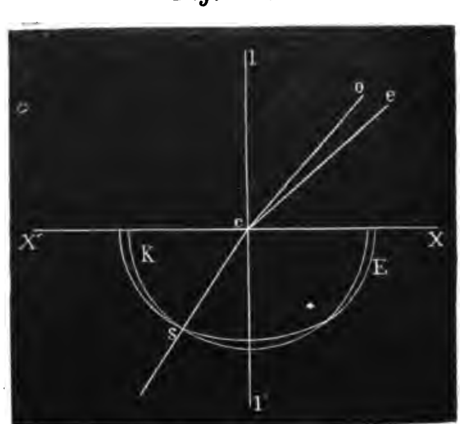
On en déduit pour l'ouverture φ du cône :

$$\varphi = 2 \text{ arc tang. } \tfrac{1}{4} \text{ tang. } 6^\circ\ 14'$$
$$= 3^\circ\ 7'\ 41''.$$

La théorie, d'un autre côté, permet comme nous allons l'indiquer, de calculer une ouverture principale du cône dans le cas observé par Lloyd.

Supposons que le plan des axes optiques coupe suivant xx' (figure 198) la

Fig. 198.



face du cristal, par laquelle sort le cône, et que KE soit l'intersection de ce plan avec la surface de l'onde. Soit *sc* le rayon composé dans le cristal. Deux des rayons en nombre indéfini en lesquels il se divise, sont dans le plan des axes optiques et forment une section principale du cône. Soient *co* et *ce* ces rayons L'onde du rayon *co* dont les vibrations sont perpendiculaires au plan

des axes optiques, a dans le cristal la vitesse $sc = b$, et est réfractée ordinairement. On a donc :

$$\text{Sin. } lco = \frac{v}{b} \text{ Sin. } scl'.$$

Mais pour l'angle scl' que l'axe optique secondaire fait avec la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques, nous avons (page 285).

$$\text{Cos.}^2 scl' = \frac{(a^2 - b^2)\, c^2}{(a^2 - c^2)\, b^2}$$

Ou bien en représentant par α, β, γ les indices principaux de réfraction $\frac{v}{a}$, $\frac{v}{b}$, $\frac{v}{c}$ pour les rayons de réfrangibilité moyenne :

$$\text{Cos.}^2 scl' = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}$$

d'où l'on déduit $\qquad scl' = 9^\circ\, 56'\, 27''$

Alors : $\qquad \text{Sin. } lco = 1{,}6863 \text{ Sin. } 9^\circ\, 56'\, 27''$

donc $\qquad lco = 16^\circ\, 55'\, 27''$

L'onde du rayon ce dans le cristal est parallèle à la tangente en s à l'ellipse E ; ses vibrations sont dans le plan d'incidence. L'équation de la tangente au point s, dont les coordonnées seraient x', y', est

$$\frac{yy'}{a^2} + \frac{xx'}{c^2} = 1.$$

D'où l'on déduit pour l'angle ψ que fait sa normale avec la perpendiculaire au point d'incidence :

$$\text{Tang. } \psi = \frac{x'}{y'}\,\frac{a^2}{c^2} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \text{ tang. } scl'.$$

On a en outre pour la longueur de la perpendiculaire menée du point c sur la tangente, c'est-à-dire, pour la vitesse v' de l'onde du rayon ce dans le cristal :

$$v' = \frac{1}{\sqrt{\frac{y'^2}{a^4} + \frac{x'^2}{c^4}}} = \frac{1}{\frac{y'}{a^2}\sqrt{1 + \frac{x'^2}{y'^2}\frac{a^4}{c^4}}}$$

$$= \frac{a^2}{y'} \text{ Cos. } \psi = \frac{a^2 \text{ Cos. } \psi}{b \text{ Cos. } scl'} \text{ ou } v' = v\,\frac{\beta}{\alpha^2}\,\frac{\text{Cos. } \psi}{\text{Cos. } scl'}.$$

Au moyen de ψ et de v' on calcule maintenant l'angle lce. On a en effet :

$$\text{Sin. } lce = \frac{v}{v'}\text{Sin. } \psi = \frac{\alpha^2}{\beta}\text{ tang. } \psi\text{. Cos. } scl' = \frac{\gamma^2}{\beta}\text{ Sin. } scl'$$

et par conséquent : $lce = 13° 54' 49''$.

La différence des angles *lce* et *lco* donne enfin l'ouverture *oce* du cône dans le plan des axes optiques : on trouve ainsi 3° 0′ 38″, valeur qui s'écarte fort peu de la valeur moyenne mesurée.

Pour établir complétement la théorie de la réfraction conique, il fallait encore prouver que les rayons formant le cône traversent réellement le cristal dans la direction d'un axe optique secondaire. A cet effet, Lloyd plaça la flamme d'une bougie a une grande distance du cristal, sur l'axe du cône lumineux. Ensuite il enleva la lame métallique de la seconde face du cristal et fit un point de repère, à une grande distance du cristal, sur la direction de la lumière de la bougie réfléchie par la seconde face. La ligne qui joint ce point de repère au cristal (considéré comme très-petit par rapport aux distances) forme avec la ligne menée de la flamme de la bougie au cristal, un angle qui est le double de celui formé par l'axe du cône lumineux et la normale à la plaque cristalline. Cet angle fut mesuré au moyen d'un sextant de Halley, dont le centre était à la place du cristal et fut trouvé de 31° 57′. L'axe du cône est donc incliné de 15° 58′ sur la normale à la plaque. Mais maintenant, comme conséquence de la théorie, ainsi que nous venons de le trouver, page 323 et page 324, cet angle pour les deux arêtes du cône situées dans le plan des axes optiques vaut 16° 55′ 27″ et 13° 54′ 49″ : et leur demi-somme, c'est-à-dire, 15° 25′ 8″ est l'inclinaison de l'axe du cône sur la normale : elle s'accorde d'une manière tout à fait satisfaisante avec la mesure directe.

CHAPITRE XI.

Constantes optiques des cristaux à deux axes.

Pour déterminer par un procédé direct, dioptrique, les indices de réfraction d'un milieu cristallisé, il est indispensable que des deux rayons en lesquels se partage un rayon tombant perpendiculairement à l'arête du prisme que l'on emploie, un au moins obéisse aux lois ordinaires de la réfraction, c'est-à-dire, se propage dans le prisme suivant toute direction perpendiculaire à l'arête avec

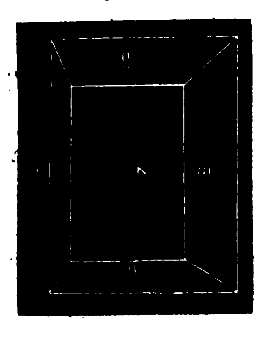
une vitesse constante. Dans les milieux à deux axes, cela n'arrive évidemment que si les faces du prisme sont parallèles à un axe principal ; alors le rayon ordinaire est polarisé perpendiculairement à l'axe principal, et sa vitesse a une des valeurs que nous avons représentées par a, b, c. Dans la recherche des indices principaux qui correspondent à ces vitesses, et qui déterminent pour chaque couleur toutes les lois du mouvement, on a ainsi à construire trois prismes parallèles aux axes principaux, et a opérer ensuite avec le rayon réfracté ordinaire absolument comme pour les milieux monoréfringents. Nous devons à Rudberg deux séries complètes de recherches de cette espèce pour l'arragonite négative et la topaze positive, et nous avons déjà eu occasion d'en faire usage en partie. La détermination complète de l'arragonite est contenue dans les tables suivantes. Là, comme plus haut, α, β, γ représentent les indices de réfraction principaux, $\frac{v}{a}$, $\frac{v}{b}$, $\frac{v}{c}$.

ARRAGONITE.

Rayon.	B	C	D	E	F	G	H
α	1,68061	1,68203	1,68589	1,69084	1,69515	1,70318	1,71011
β	1,67631	1,67779	1,68157	1,68634	1,69053	1,69836	1,70509
γ	1,52749	1,52820	1,53013	1,53264	1,53479	1,53882	1,54226

Il résulte de ces valeurs que l'arragonite est un cristal négatif. Si l'on détermine en effet les axes optiques pour les différents rayons, on trouve que la bissectrice de leur angle aigu coïncide avec le plus grand axe c du second ellipsoïde ou de la surface d'élasticité. Comme on l'a déjà dit, cette bissectrice coïncide avec l'axe du prisme mm' (figure 199). Et la seconde est dirigée suivant la grande diagonale.

Fig. 199.



L'angle ($2Z_1$) des axes optiques réels, celui ($2Z_1'$) des axes optiques secondaires, ainsi que l'ouverture φ du cône lumineux dans la réfraction conique intérieure, sont déduits des valeurs

trouvées pour les indices principaux et réunis dans le tableau suivant :

Rayon.	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$2\ Z_1 = 2\ arc.\ cos. \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}}$	17°58′22″	17°47′58″	17°50′26″	18°3′14″	18 9′20″	18°17′24″	18°26′52″
$2\ Z_1' = 2\ arc.\ cos. \sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}}$	19°44′26″	19°33′6″	19°37′24″	19°52′54″	20°0′54″	20°12′20″	20°24′54″
φ	1°51′3″	1°50′30″	1°52′4″	1°54′59″	1°57′5″	2°0′39″	2°4′3″

Nous voyons, d'après ce tableau, que l'inclinaison des axes optiques va en augmentant de l'extrémité la moins réfrangible du spectre, le rouge, à l'extrémité la plus réfrangible, le violet : l'anomalie du rayon B doit être attribuée aux erreurs de l'observation. C'est l'inverse dans la topaze dont les indices principaux sont dans le tableau suivant :

TOPAZE.

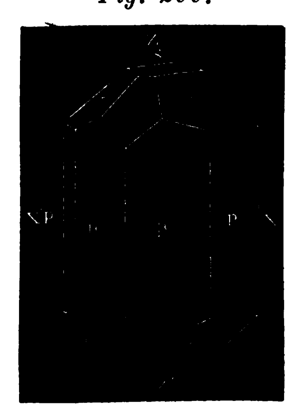
Rayon.	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
α	1,61791	1,61880	1,62109	1,62408	1,62652	1,63123	1,63506
β	1,61049	1,61144	1,61375	1,61668	1,61914	1,62365	1,62745
γ	1,60840	1,60935	1,61161	1,61452	1,61701	1,62154	1,62539

Dans la topaze les axes optiques se rapprochent plus du plus petit axe de la surface d'élasticité ; c'est donc un cristal positif. Leur inclinaison diminue pour les rayons les plus réfrangibles comme l'ont montré d'autres recherches, et comme on peut le déduire avec une certaine vraisemblance du tableau suivant, qui renferme les valeurs calculées de $2\ Z_1$, $2\ Z_1'$ et φ.

Rayon.	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
$2Z_1 = 2\,arc.\,sin.\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}}$	56°7′20″	56°18′52″	56°58′44″	56°58′28″	56°42′10″	55°50′40″	55°11′0″
$2Z_1' = 2\,arc.\,sin.\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}}$	55°50′22″	56°2′8″	56°39′56″	56°41′30″	56°25′20″	55°33′44″	54°54′18″
φ	0°16′46″	0°16′41″	0°16′52″	0°16′58″	0°16′48″	0°16′54″	0°16′41″

Quant au rapport des constantes optiques avec la forme cristalline, la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques est parallèle à l'axe du prisme PP et la seconde l'est à sa grande diagonale (figure 200).

Fig. 200.



Les données que nous venons de rapporter, ont servi (1) à vérifier les formules générales du mouvement lumineux dans le cas particulier où l'onde plane est perpendiculaire à un axe principal. Alors, par suite de la constitution de l'éther, les constantes P, Q et R disparaissent dans l'équation de l'ellipsoïde de polarisation de Cauchy, et les axes de ce dernier se confondent avec ceux d'élasticité. Les deux axes de l'ellipsoïde qui sont parallèles au plan de l'onde, s'expriment au moyen de formules tout à fait analogues à celles qu'on a pour les milieux isotropes ou pour les milieux à un axe : pour les vitesses des ondes dont les vibrations sont parallèles aux axes principaux, on obtient aussi des expressions tout à fait semblables. Sans faire les calculs et en nous contentant d'une approximation, on voit qu'en représentant comme toujours par α, β, γ les indices correspondants à ces vitesses, on doit poser :

$$\alpha = A_0 + A_2 \frac{1}{\Lambda_2}, \quad \beta = B_0 + B_2 \frac{1}{\Lambda_2}, \quad \gamma = C_0 + C_2 \frac{1}{\Lambda_2} \text{ etc.}$$

ou bien :

(1) Radicke. Ann. de Pogg. XLV.

$$\frac{1}{\alpha} = A \frac{\text{Sin.}\,\frac{A'}{\Lambda}}{\frac{A'}{\Lambda}}, \quad \frac{1}{\beta} = B \frac{\text{Sin.}\,\frac{B'}{\Lambda}}{\frac{B'}{\Lambda}}, \quad \frac{1}{\gamma} = C \frac{\text{Sin.}\,\frac{C'}{\Lambda}}{\frac{C'}{\Lambda}}.$$

Dans les tableaux suivants se trouve la vérification de la formule approximative de Cauchy, calculée au moyen des indices de réfraction de l'arragonite et de la topaze déterminés par Rudberg.

$\frac{1}{\Lambda_h^2} - \frac{1}{\Lambda_g^2}$	$\frac{1}{\Lambda_g^2} - \frac{1}{\Lambda_f^2}$	$\frac{1}{\Lambda_f^2} - \frac{1}{\Lambda_e^2}$	$\frac{1}{\Lambda_e^2} - \frac{1}{\Lambda_d^2}$	$\frac{1}{\Lambda_d^2} - \frac{1}{\Lambda_c^2}$	$\frac{1}{\Lambda_c^2} - \frac{1}{\Lambda_b^2}$
77	86	47	54	41	15

1. ARRAGONITE.

$\alpha_h - \alpha_g$	$\alpha_g - \alpha_f$	$\alpha_f - \alpha_e$	$\alpha_e - \alpha_d$	$\alpha_d - \alpha_c$	$\alpha_c - \alpha_b$
673	783	419	477	378	148
77	89	47	54	43	16

$\beta_h - \beta_g$	$\beta_g - \beta_f$	$\beta_f - \beta_e$	$\beta_e - \beta_d$	$\beta_d - \beta_c$	$\beta_c - \beta_b$
693	803	431	495	386	142
77	89	47	55	42	15

$\gamma_h - \gamma_g$	$\gamma_g - \gamma_f$	$\gamma_f - \gamma_e$	$\gamma_e - \gamma_d$	$\gamma_d - \gamma_c$	$\gamma_c - \gamma_b$
344	403	215	251	193	71
77	90	48	56	43	15

2. TOPAZE.

$\alpha_h - \alpha_g$	$\alpha_g - \alpha_f$	$\alpha_f - \alpha_e$	$\alpha_e - \alpha_d$	$\alpha_d - \alpha_c$	$\alpha_c - \alpha_b$
382	572	244	299	229	89
77	115	49	60	46	17

$\beta_h - \beta_g$	$\beta_g - \beta_f$	$\beta_f - \beta_e$	$\beta_e - \beta_d$	$\beta_d - \beta_c$	$\beta_c - \beta_b$
385	453	249	291	226	95
77	90	49	58	45	19

$\gamma_h - \gamma_g$	$\gamma_g - \gamma_f$	$\gamma_f - \gamma_e$	$\gamma_e - \gamma_d$	$\gamma_d - \gamma_c$	$\gamma_c - \gamma_b$
380	451	246	293	231	95
77	91	49	59	46	19

Aucun cristal à deux axes n'a été jusqu'à ce jour aussi complétement étudié que l'arragonite et la topaze; il est vrai qu'ils s'y prêtent parfaitement. Pour quelques-uns seulement nous ne connaissons que les indices de réfraction moyens pour les rayons de réfrangibilité moyenne, c'est-à-dire, les indices abstraction faite de la double réfraction et de la dispersion.

En revanche nous avons des notions plus complètes sur la nature de la double réfraction, l'inclinaison des axes optiques et leur position par rapport à la forme cristalline. La raison en est que la détermination de ces rapports présente bien moins de difficultés que celle des indices de réfraction et trouve une application immédiate. La simple détermination de la nature de la double réfraction et celle des axes optiques supposent la connaissance des phénomènes d'interférence que les lames cristallines présentent avec la lumière polarisée;

mais cette question nous est encore étrangère, attendu que nous n'avons d'abord cherché qu'à connaître les lois du mouvement lumineux dans les cristaux, lois qui servent d'ailleurs de fondement à l'explication des premiers phénomènes. Nous n'en ferons pas moins connaître les résultats de ces recherches, parce qu'ils forment la conclusion toute naturelle de la partie de l'optique qu'on vient d'étudier.

Quant au mode de représentation que nous allons employer, il est nécessaire de donner avant quelques éclaircissements. Pour pouvoir indiquer facilement sur la même figure la forme cristalline et la position des axes optiques, nous emploierons, comme Miller l'a fait le premier, la représentation sphérique. Nous supposons qu'autour du centre de la forme cristalline on a décrit une sphère et nous indiquons ses points de rencontre avec les normales aux faces du cristal et avec les axes optiques. Ensuite nous menons, quand cela est possible, un plan de symétrie parallèle au plan du dessin, sur lequel nous projetons ces points de rencontre. Ces derniers forment des groupes dont toujours un occupe la circonférence d'un grand cercle. Chacun de ces groupes est appelé une *zone* par les cristallographes : il est formé par l'ensemble de toutes les faces parallèles à une seule et même direction qu'on nomme *l'axe de la zone*. Les *zones principales* sont celles dont l'axe coïncide avec un axe de symétrie. Les cristaux isocliniques possèdent trois zones principales, les trois sections principales ; les monocliniques n'en ont qu'une seule, le plan de symétrie : dans les cristaux tricliniques enfin il n'y a aucune zone principale.

Au moyen d'un calcul analytique simple, on déduit de la loi générale de la cristallisation ce théorème, que les sections de deux zones sont les pôles d'une face cristalline possible. On obtient donc d'après cela toutes les zones possibles d'un cristal, en menant par les pôles de deux faces possibles un grand cercle, et les intersections de toutes les zones possibles sont les pôles de toutes les faces possibles.

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons aux faces cristallines les plus importantes, et à côté de la représentation sphérique, nous placerons une vue du cristal dans laquelle les faces sont désignées par les mêmes lettres que leurs pôles dans la première figure, de telle sorte qu'il sera facile dans un cristal donné de déterminer les directions les plus remarquables au point de vue optique.

Comme sources des résultats ici rassemblés, on pourra consulter les ouvrages suivants :

Optique de Brewster. — *Optique d'*Herschell. — *Optique de* Radicke. — *Physique de* Baumgartner. Supplém. — Brewster : *Propriétés optiques de*

la glauberite. Ann. Pogg., XXI et XXVII. — *Sur la différence dans l'inclinaison mutuelle des axes optiques dans des individus du même minéral.* Ann. Pogg., XXVII. — Miller : *Position des axes d'élasticité optique dans les cristaux du système hémi-prismatique*. Ann. Pogg., XXXVII et LV. — *Formes et constantes optiques du salpêtre*. Id. L. — *de l'anhydrite*. Id. LV. — Neumann : *Propriétés optiques des cristaux hémi-prismatiques*. — *Remarque importante sur les propriétés optiques des cristaux hémi-prismatiques* Ann. Pogg., XXXV. — *Sur les propriétés optiques des cristaux hémi- et tétarto-prismatiques*. (*Notices de* Naumann, Dove, Babinet *et* Nörrenberg). Ann. Pogg., XXXV. — Müller : *Propriétés optiques du formiate de cuivre*. Ann. Pogg., XXXV. — Plücker et Beer : *Sur les axes magnétiques des cristaux et leurs rapports avec la forme cristalline et les axes optiques*. Ann. Pogg., LXXXI. — Beer : *Observations sur les cristaux pléochromiques*. Ann. Pogg., LXXXII. — Haidinger : *Sur les couleurs de l'axinite*. Ann. Pogg., LXIII. — *Sur le pléochromisme des cristaux*. Ibid., LXV. — *Sur la cordiérite*, LXVII, *l'andalousite et le diaspore*, LXI. — De Sénarmont : *Propagation de la chaleur dans les cristaux*. Ann. Pogg., LXXV. — *Recherches sur les propriétés optiques bi-réfringentes des corps isomorphes*. Comptes rendus, octobre 1851. — *Observations sur les propriétés optiques des micas et sur leur forme cristalline*. Ibid. Décembre 1851. Annales de physique et de chimie. 3e série, t. XXXIII. — Angström : *Sur les constantes moléculaires des cristaux monocliniques*. Ann. Pogg., LXXXVII.

A. CRISTAUX ISOCLINIQUES.

Les axes principaux optiques coïncident toujours, pour toutes les couleurs, avec les axes cristallographiques. Les axes optiques sont alors dans une section principale, et font avec chaque axe de cette dernière le même angle de part et d'autre. Cet angle change d'une couleur à une autre, toutefois d'une très-petite quantité, mais toujours de manière à croître ou à diminuer graduellement, en passant de l'extrémité violette du spectre, à l'extrémité rouge. Si nous recevons toutes les couleurs dans l'œil, nous obtenons ainsi deux faisceaux d'axes; nous les désignerons par AA' et BB' et leur angle par AB. L'angle exact des axes optiques pour les rayons rouges et celui des rayons violets seront désignés par ρ et υ; si cet angle est aigu, et si $\rho > \upsilon$, alors les axes pour la lumière rouge embrassent ceux de la lumière violette, tandis que c'est le contraire si l'angle est obtus ou si $\rho < \upsilon$. Nous conservons aux lettres μ, α, β, γ les mêmes significations qu'elles ont eues jusqu'à présent.

Acide citrique. (Fig. 207). $mm' = 117° 30'$; $ll' = 125° 21'$. Clivage parallèle à l et à k. — AB = 70° 29'. Positif. $\mu = 1,527$. Br. — $\rho > \upsilon$.

Andalousite. (Fig. 202.) $mm' = 90° 51'$. — AB' = 87° 33'. L'indice des rayons verts, qui se propagent perpendiculairement à pp' et dont les vibrations sont parallèles à cette direction, est 1,631, celui des rayons rouges dont la direction et les vibrations sont perpendiculaires à pp' est 1,624. Le premier nombre se rapporte à la réfraction ordinaire, le dernier à la réfraction extraordinaire. [Haid.]. Le dernier rapport n'est donc pas tout à fait déterminé.

Anhydrite. (Fig. 203.) $mm' = 88° 50'$; $hr = 48° 18'$. Clivage très-facile parallèlement aux faces k et h, moins facile parallèlement à la face p un peu rugueuse, imparfait suivant r. — $\alpha = 1,614$; $\beta = 1,576$; $\gamma = 1,571$. Double réfraction positive. AB = 43° 32'. [Miller.]. — $\alpha = 1,6219$; $(\beta, \gamma) = 1,5772$; AB = 44° 41'. [Bi.]. — AB = 28°7'. Positif. [Br.]. — D'après l'indice de Miller, on calcule AB = 40° 26' 30''. $\upsilon > \rho$.

Arragonite. (Fig. 204.) $mm' = 116° 16'$. Clivage parallèle à k. — AB = 161° 42'. Négatif. [Br.]. — $(\alpha, \beta) = 1,6931$; $\gamma = 1,5348$. [Malus.]. — $\upsilon > \rho$. Voyez page 325.

Bitartrate de potasse, crème de tartre. Dans les tableaux d'Herschel on trouve pour le tartrate de potasse AB = 71° 20' et une double réfraction négative ; comme maintenant on a AB = 62° pour le tartrate neutre (voir plus bas) la donnée de Brewster s'applique probablement au bitartrate.

Broukite. Se présente en lames, parallèles à une section principale, et dont les faces sont striées. La normale à la plaque est la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques, le plan de ces axes est perpendiculaire à la direction des stries. L'angle des axes est petit. $\rho > \upsilon$.

Carbonate d'ammoniaque. AB = 43° 24'. Négatif. [Br.].

Célestine. Isomorphe avec le spath pesant (voyez plus bas). — Suivant Knoblauch, Tyndall et M. de Sénarmont la position des axes optiques dans ce cristal est la même que dans le spath. — AB = 50°. Positif. $\mu = 1,644$. [Br.].

Chlorure de baryum. (Fig. 205.) $mm' = 92°, 30'$. — pp' est la normale aux axes optiques.

Chromate de magnésie. Isomorphe avec le sulfate de magnésie. — Mêmes caractères de double réfraction ; même rapport entre ρ et υ ; l'angle des axes optiques est aussi presque le même.

Chromate de potasse. $\alpha = 1,665$; $\gamma = 1,319$. [Br.]. (?). La position des deux bissectrices est la même que dans son isomorphe le sulfate de potasse.

Mais les axes de plus grande et de plus petite élasticité sont inversement placés. AB = 49° 32'. β = 1,722. $\upsilon < \rho$. Négatif. [de Sén.].

Chrysoberil (Cymophane). (Fig. 206.) *pl* = 30° 7'. — *pp'* est la bissectrice de l'angle aigu. AB = 27° 51' [Soret.] — Positif. μ = 1,760 [Br.].

Chrysolithe. AB = 87° 56'; μ = 1,660. [Br.].

Cryolithe. μ = 1,344, = 1,349; α = 1,685, γ = 1,668. [Br.].

Comptonite. AB = 56° 6'. Positif. μ = 1,553. [Br.].

Cordiérite. (Fig. 208). *mm'* = 120°. Clivage imparfait parallèlement à *m*, *m'* et *k*. — AB = 62° 50'. Négatif. μ = 1,544. [Br.]. — *pp'* est la bissectrice de l'angle aigu, et *hh'* la seconde. [Haid.]. — $\rho < \upsilon$.

Diaspore de Schemnitz. Pour deux indices principaux, Haidinger a trouvé 1,694 et 1,652.

Mica. (Fig. 209.) *mm'* = c. 60°. Clivage parallèle à *p*. — La bissectrice de l'angle aigu est *pp'*. Avec la composition chimique, l'angle des axes optiques varie de 0° à 70° et ces axes sont tantôt dans le plan *pop'*, tantôt dans le plan *php'*. [deSén.]. — Négatif.

Nitrate d'argent. (Fig. 215.) *mm'* = 129° 30'. — *pp'* est la bissectrice de l'angle aigu. — AB = 62° 16'. Positif. α = 1,788 ; γ = 1,729. [Br.].

Plomb blanc (carbonate de plomb). (Fig. 218.) *mm'* = 117° 14'. Clivage parallèle à *m* et *m'*. — AB = 5° 15'. Négatif. α = 2,084 ; γ = 1,813. [Br.]. — $\rho > \upsilon$.

Salpêtre. (Fig. 204.) *mm'* = 119°. — AB = 174° 40'. Négatif. α = 1,5145 ; γ = 1,335. [Br.]. — α = 1,5052 ; β = 1,5046 ; γ = 1,333. [Mill.]. De ces indices on déduit AB = 173° 49'. $\upsilon > \rho$.

Sel de Seignette ou *de la Rochelle.* [Fig. 214.] Isomorphe avec le tartrate d'ammoniaque et de soude. (Fig. 201). *mm'* = 100° 30'. — *pp'* est la bissectrice de l'angle aigu, *hh'* celle de l'angle obtus. — $\rho_1 \rho_2$ = 76°; $\upsilon_1 \upsilon_2$ = 56°. Pour les rayons verts, μ = 1,4985, pour les rouges μ = 1,4929. [He.]. — AB = 80°. Positif. μ = 1,515 [Br.]. — Quant à la manière dont les propriétés doublement réfringentes du sel de seignette se transforment en celles du tartrate d'ammoniac et de soude, quand on mélange le premier sel avec une quantité toujours plus grande du dernier, voyez de Sénarmont, *Comptes rendus*, oct. 1851.

Soufre. μ = 2,040. [W.]. — μ = 1,958. [Haüy]. — μ = 2,008. [Y.]. — μ = 2,115 (pour le soufre naturel). — S. fondu : μ = 2,148. [Br.].

Spath pesant. (Fig. 213.) *mm'* = 63° 38'. Clivage parallèle à *k*, *f* et *f'*. — AB = 142° 18'. Positif. α = 1,664. [Br.]. — μ = 1,646. [W.] — (α, β) = 1,6468 ; γ = 1,6352. [Mal.]; γ = 1,6201. [Bi.]. — Pour les

rayons jaunes-verdâtres (par la réfraction ordinaire le long de l'axe?) μ = 1,6460; dans un autre échantillon pour les rayons rouges μ = 1,6459, dans un troisième pour les rayons verts-jaunâtres μ = 1,6491. [He.]. — $\upsilon > \rho$.

Staurolithe. (Fig. 216.) *mm'* = 50° 40'. Clivage suivant *h*. — AB = *c*. 85°. Positif. $\rho > \upsilon$.

Stilbite. AB = 41° 42'. Positif. μ = 1,508. [Br.].

Strontianite. AB = 6° 56'. Négatif. α = 1,700; γ = 1,543. [Br.].

Sulfate ammoniaco-magnésien. AB = 51° 22'. Positif. μ = 1,483. [Br.].

Sulfate d'ammoniaque. AB = 49° 42'. Positif. [Marx.].

Sulfate de magnésie. Sel amer. (Fig. 212.) *mm'* = 90° 38'. Clivage parallèle à *k*. — AB = 37° 24'. Négatif. μ. = 1,488 = 1,465. [Br.]. — $\rho > \upsilon$. — AB = 38° 14'. β = 1,459 — 1,454. [de Sén.].

Sulfate de nickel. Il s'accorde quant à la forme cristalline et aux caractères optiques avec le chromate et le sulfate de magnésie, seulement, suivant Brewster, AB = 42° 4'. La donnée de ce savant que la double réfraction serait positive est erronée.

Sulfate de plomb. Isomorphe du spath pesant (voyez plus haut) suivant M. de Sénarmont; les axes optiques sont comme dans celui-ci, et il est positif. — μ = 1,925. [Br.].

Sulfate de potasse. (Fig, 210.) *mm'* = 59° 36'. — AB = 113°. Positif. μ = 1,509. [Br.]. — μ = 1,475. [W.]. — $\upsilon = \rho$. — AB = 66° 54' — 67° 20'. β = 1,494. [de Sén.].

Sulfate de strontiane (Célestine). Positif. Position des bissectrices comme dans son isomorphe le spath pesant. [de Sén.].

Sulfate de zinc. Isomorphe au sulfate de magnésie, etc.; même position des axes optiques par rapport au cristal, même caractère de double réfraction. — AB = 44° 28'; μ = 1,517. [Br.]. — AB = 44° 2'. β = 1,483 — 1,486. [de Sén.].

Talk. Cristallise en prismes rhombiques courts de *c*. 120°. L'axe de ces prismes, qui est perpendiculaire à la face de clivage, est la bissectrice de l'angle aigu. — AB = 7° 24'. Négatif. [Br.].

Tartrate d'ammoniaque et de soude. (Fig. 201.) *mm'* = 98° 32' — *pp'* est la bissectrice de l'angle aigu, *kk'* celle de l'angle obtus. Négatif. μ = 1,490 — 1,495. $\rho\rho$ = 62°; $\upsilon\upsilon$ = 46°. [de Sén.].

Tartrate d'antimoine et de potasse. Emétique. Les cristaux sont la plupart octaëdriques, et très-facilement clivables suivant une section principale. Le plan de clivage contient les deux axes optiques.

Topaze. (Fig. 217.) *mm'* = 124° 19'. Très-clivable parallèlement à *p*.

Topaze du Brésil. AB $=$ 49° 1′. [Bi.]. — AB $=$ 49° 50′. [Br.]. — $\alpha =$ 1,6401 ; $\gamma =$ 1,6325. [Bi.]. — Topaze incolore. $\mu =$ 1,6102 ; AB $=$ 64° 14′. [Bi.]. – id. d'Aberdeen. AB $=$ 65°. Positif. [Br.]. — Topaze bleuâtre ; $\mu =$ 1,624. [Br.] ; id. bleue d'Aberdeen, $\mu =$ 1,636. [Br.] ; id. jaune, $\mu =$ 1,638. [Br.] ; id. rouge, $\mu =$ 1,652. [Br.]. — Réflexion positive. $\mu =$ 1,638. [J*.]. — $\rho > \upsilon$. Voyez page 326.

Withérite. Négatif. $\gamma =$ 1,540. [Br.].

B. CRISTAUX MONOCLINIQUES.

Comme le montrent les lois des formes cristallines, un axe d'élasticité optique se confond toujours dans ce système avec l'axe de symétrie pour toutes les couleurs. Toutefois, on n'est pas parvenu jusqu'à présent à démontrer comment la position des deux axes d'élasticité, qui d'après cela sont dans le plan de symétrie, serait déterminée par les propriétés cristallographiques. Quelquefois, il est vrai, un de ces axes coïncide avec l'axe d'une zone, comme, par exemple, dans l'épidote, puisqu'alors les choses se passent comme dans un cristal isoclinique ; mais cela ne se voit que dans quelques cas.

La position des deux axes qui se trouvent dans le plan de symétrie change seulement très-peu, mais d'une manière continue, d'un bout du spectre à l'autre. Si donc s (fig. 219), est le pôle du plan de symétrie, en général les axes d'élasticité ξ_r, η_r, ξ_j, η_j, ξ_v, η_v pour le rouge, le jaune et le violet, sont placés dans le plan de symétrie comme le montre la figure. En outre, l'angle des axes optiques change avec la réfraction. Dès lors il y a à distinguer les cas suivants qui se présentent réellement :

1) Le plan des axes optiques est perpendiculaire au plan de symétrie.

a) L'axe de symétrie est, comme par exemple dans le borax, la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques pour toutes les couleurs. En passant des rayons rouges aux rayons violets, le plan des axes optiques tourne autour de cette bissectrice et leur angle croît ou décroît.

b) L'axe de symétrie pour toutes les couleurs est la bissectrice de l'angle obtus. La bissectrice de l'angle aigu est dans le plan de symétrie et change d'une couleur à l'autre comme aussi l'angle des axes optiques. C'est entre autres le cas de l'acide tartrique.

2) Les axes optiques sont dans le plan de symétrie. Alors dans un des faisceaux d'axes, les axes des rayons les plus réfrangibles peuvent être tournés vers la bissectrice du faisceau, tandis que dans l'autre elle en est écartée ; de

même la séparation des différents axes en deux faisceaux sera en général différemment grande : Gypse. — Mais il peut aussi arriver que la distribution des axes des deux côtés de la bissectrice de leurs faisceaux soit égale, comme, par exemple, dans le sucre.

Acétate de cuivre. (Fig. 235.) $mm' = 72°$; $ph = 63°$. Clivage parallèle à m, m' et p. — Les axes optiques sont dans le plan de symétrie ; la bissectrice de leur angle aigu est dans le voisinage de pp' et forme avec hh' un angle un peu plus grand que la direction pp'. AB = *c.* 85°. [Nörrenberg]. Positif.

Acétate de plomb. (Fig. 222.) $mm' = 52°$; $ph = 70° 28'$. Clivage parallèle à p et à h. Les faisceaux d'axes sont presque perpendiculaires à p et à h. Les axes des rayons violets embrassent ceux des rayons rouges. — AB = 70° 25'. Négatif. [Br.]. — μ = 1,400. [W.].

Acétate de soude. (Fig. 237.) $mm' = 84° 30'$; $ph = 68° 16'$. Clivable suivant p, m, et m'. — $p\xi = 78° 51'$. AB = 117° 10'. β = 1,464. [Mi.].

Acétate de zinc. (Fig. 245.) $mm' = 67° 24'$; $gg' = 58° 43'$; $ph = 46° 30'$. — $p\xi = 11° 16'$. AB = 84° 30'. β = 1,494. [Mi.].

Acide benzoïque. (Fig. 221.) $fg = 69° 25'$; $fh = 97° 20'$. — $f\xi = 28° 31'$. AB = 62° 37'. β = 1,617 [Mi.].

Acide oxalique. (Fig. 241.) $mm' = 63° 5'$; $ee' = 34° 32'$; $pg = 50° 40'$; $pf' = 76° 45'$; $ph = 73° 48'$. — La normale aux axes optiques se confond avec l'axe de la zone $pee'p'$. AB = 68°. β = 1,490. [Mi.].

Acide succinique. AB = *c.* 9[illegible]. [Br.].

Acide tartrique. (Fig. 244.) $mm' = 76° 30'$; $ee' = 88° 30'$; $ph = 80° 3'$ (suivant Kopp : $mm' = 77° 8'$; $ee' = 90° 54'$; $ph = 79° 43'$) — $h\xi = 20° 30'$. AB = 96° 36'. β = 1,542. [Mi.]. — α = 1,575, = 1,529 ; γ = 1,518 ; AB = 101°. Négatif. [Br.]. — $h\xi = 20° 27'$. AB = *c.* 120°. Négatif. [de Sén.]. — D'après une communication de Nörrenberg, l'angle apparent des axes = c. 145°. Positif.

Arséniate de soude. Isomorphe et optiquement semblable au phosphate de soude. [de Sén.].

Bicarbonate de potasse. (Fig. 232.) $mm' = 42° 0'$; $ph = 76° 35'$; $hg = 53° 15'$; $hf = 52° 8'$. — $g\xi = 6° 28'$; AB = 81° 38'; β = 1,482. [Mi.].

Bichlorure de cuivre. AB = 84° 30'. [Br.].

Borax. (Fig. 223.) $mm' = 87°$; $ph = 73° 25'$; — $h'\xi = 35°$; AB = 29° 5'. [Mi.]. — AB = 28° 42'. Positif. μ = 1,475. [Br.]. — Poids spécifique 1,714. μ = 1,467. [N.]. — Le Tinkal, borax naturel, ne diffère pas, quant à ses propriétés optiques, du borax artificiel, par conséquent les

données de Brewster sur le premier sont inexactes. On a $\rho > \upsilon$ et $h'\xi$ pour les rayons rouges moindre que pour les violets. — Fondu : $\mu = 1,532$. [Br.]. — Négatif. [Nörr.].

Carbonate de soude. AB = 70° 1'. Négatif. [Br.]. — Une bissectrice coïncide avec l'axe de symétrie. — Fondu : $\mu = 1,411$. [Y.].

Chlorate de potasse. (Fig. 231.) $mm' = 104°$; $ph = 70° 11'$; $ee' = 79° 30'$. Clivage parallèle à m, m', et p. — $p\xi = 37° 42'$; AB = 152° 30' ; $\beta = 1,507$. [Mi.].

Chlorite (du comté de Chester). Il cristallise en plaques ayant la forme d'un triangle équilatéral. Clivage facile parallèlement aux faces des plaques. Le plan des axes optiques est perpendiculaire à celui de la plaque et partage en deux parties égales un des angles du contour triangulaire. Dans deux individus différents un des axes optiques formait avec la normale à la face de clivage les angles de 50°, 58° 13', et le second axe faisait les angles de 34°, 27° 40'. Des mesures exactes donnèrent pour l'inclinaison des axes optiques, dans l'un des échantillons 84° 30', dans l'autre 85° 59'. Suivant M. Biot, l'alachorite est à un axe optique. (Blake. *Journal américain de Silliman*, nov. 1851.)

Diopside, Augite. (Fig. 224.) $mm' = 87° 6'$; $ph = 74° 1'$. Clivage parallèle à m, m'. — $p\xi = 54° 53'$. AB = 58° 56'. $\beta = 1,680$. [Mi.]. — $\rho > \upsilon$. Positif. — L'observation de l'angle principal d'incidence donne $\mu = 1,378$. Réflexion positive. [J^y.].

Epidote. (Fig. 228.) $ph = 64° 30'$; $f'h' = 51° 41'$. — La bissectrice de l'angle aigu se confond avec l'axe de la zone hkh'. AB = 86° 59'. Mi. — $\alpha = 1,703$; $\gamma = 1,661$. AB = c. 84° 19'. [Br.]. — AB = 87° 19' [Mrx.].

Euclase. M. Biot a trouvé pour deux des indices principaux 1,6429, et 1,6630.

Feldspath adulaire. (Fig. 229.) $mm' = 118° 49'$; $ph = 63° 53'$. Clivage parallèle à p. — Les deux axes optiques sont dans le plan de clivage : leur bissectrice est la normale au plan de symétrie. AB = 57° — 58°. [Mi.]. — AB = 58°, 5'. [Br. suivant Mi.]. — AB = 63°. Négatif. $\mu = 1,764$, $\mu = 1,536$. [Br.]. — Suivant Angström le plan des axes optiques forme avec le plan de clivage à 18° de temp. centigrade un angle de 4° 1'.

Formiate de cuivre. (Fig. 236). $mm' = 90°$; $ph = 79° 20'$. Clivage parallèle à p. L'un des faisceaux d'axes est presque perpendiculaire aux faces p ; le second est écarté du précédent d'environ 37°. Dans le premier, l'axe pour les rayons violets est tourné vers la bissectrice de l'angle aigu ; dans le second c'est celui pour les rayons rouges. [Müller.].

Glauberite. A la température ordinaire, elle est à un axe pour les rayons violets, mais pour les autres elle suit les lois générales. AB = 3 — 5°. [Br.]. — Il résulte des indications de M. de Sénarmont, que la bissectrice de l'angle aigu est perpendiculaire à la face du clivage (base du prisme rhombique oblique) et que la seconde se confond avec l'axe de symétrie.

Gypse. Sélénite. (Fig. 230.) *mm'* = 111° 14'; *ph* = 81° 26'; *oo'* = 138° 44'; *zz'* = 143° 28'. Clivage facile parallèlement à *k*. Cassure conchoïde parallèlement à *h*. Cassure fibreuse parallèlement à *f*. — *fh* = 113° 7' 48''. — *f*ξ = 73° — 74°. [Bi.]. Pour une température entre 17° et 18° R. *f*ξ = 75° 40'. Pour la température 16°,2 R. AB = 57° 37'. [Neum.]. Dans le faisceau AA', l'axe pour les rayons violets est plus près de la bissectrice de l'angle aigu; dans le faisceau BB' c'est celui des rayons rouges. — AB = 60°. Double réfraction positive. [Br.]. — μ = 1,488 (densité 2,252) [N.]. — μ = 1,525. [W.]. — α = 1,536. [Br.]. — β = 1,5224. [Neum.]. — A 19° C. et pour la lumière jaune de l'alcool salé : α = 1,52975; β = 1,52267; γ = 1,52056. D'où il résulte AB = 57° 30' 50''. [Angst.].

Heulandite. AB = 54° 17'. [He. 1126].

Hyposulfite de soude. (Fig. 240.) *mm'* = 142° 24', *ph* = 76° 2', — *h'*ξ = *c*. 45°. — Angle apparent des axes = *c*. 154°. [Nörr.]. Positif.

Labrador. μ = 1,80. [He.].

Mesotype. α = 1,522; γ = 1,516. [Br.].

Nadelstein de Faröe. μ = 1,5153. [Br.].

Oxalate de chaux hydraté (minéral.) (Fig. 234.) *cm* = 50° 18'; *ca* = 37° 24',5; *cu* = 31° 3'; *pcm* = 72° 41'; *pb* = 70° 33'. — *b*ξ = 8°. [Mi.].

Phosphate de soude à 24 éq. d'eau. (Fig. 238.) *mm'* = 67° 45'; *ph* = 58° 32'. — *p*ξ = 64° 50'; AB = 56° 40'; β = 1,40. [Mi.]. — *p*ξ = 64° 35'. [de Sén.].

Phosphate de soude hydraté? AB = 55° 20'. Négatif. [Br.].

Phosphate neutre de magnésie. Les axes optiques sont dans le plan de symétrie.

Plomb rouge. (Fig. 242.) *mm'* = 86° 20'. — L'axe de la zone *mm'* est la bissectrice de l'angle aigu. [Nörrenberg.]. — α = 2,926, = 2,974; γ = 2,479 = 2,500 = 2,503. [Br.].

Prussiate rouge de potasse. (Fig. 211.) *mm'* = 76° 4'. Clivage parallèle à *h*. — AB = 19° 24'. Positif. [Br.]. — AB = 19° 35'. [Mx.]. — $\rho < \upsilon$. — Angle apparent des axes plus grand que dans le spath pesant. [Nörr.].

Réalgar. μ = 2,420. Réflexion positive. [J.].

Sphène. (Fig. 243.) *pql* = 85° 10'; *px* = 39° 19'; *xy* = 21° 5';

$ql = 66° 54'$. — La bissectrice de l'angle obtus coïncide avec l'axe de la zone xfq. AB = 30° 22'; $\beta = 1{,}631$. [Mi.].

Sucre. (Fig. 246.) $mm' = 79° 20'$; $ph = 75° 30'$ (suivant Kopp : $mm' = 78° 30'$; $ph = 76° 44'$) — $h\xi = 22° 12'$. AB = 47° 16'. $\beta = 1{,}57$. [Mi.]. AB = 50° 0'. Négatif. [Br.]. — $\rho < \upsilon$. Sucre blanc. $\mu = 1{,}535$. [W.]. — Id. $\mu = 1{,}541$. [Y.]. — Fondu. $\mu = 1{,}545$. [Y.]. — Après avoir été fondu. $\mu = 1{,}555$. [Br.].

Sulfate double d'ammoniaque et de magnésie. Isomorphe et optiquement semblable au sulfate double de potasse et de fer (voyez celui-ci). $p\xi = 98° 41' - 99° 1'$. AB = 51° 4'. $\beta = 1{,}476 - 1{,}483$. Positif. [de Sén.].

Sulfate double de cobalt et d'ammoniaque. Les axes optiques sont dans le plan de symétrie.

Sulfate double de cobalt et de potasse. Isomorphe et optiquement semblable au sulfate double de potasse et de fer (voyez celui-ci). $p\xi = 96° 45' - 97° 36'$. AB = 52° 11'. $\beta = 1{,}462 - 1{,}469$. Positif. [de Sén.].

Sulfate double de fer et d'ammoniaque. (Fig. 227.) $mm' = 109° 36'$. $ph = 73° 12'$; $ee' = 129° 18'$. (Suivant Kopp : $mm' = 108° 30'$; $ph \doteq 74° 30'$; $ee' \doteq 51° 30'$.) — $h'\xi = 9° 6'$; AB = 75° 49'. $\beta = 1{,}47$. [Mi.].

Sulfate double de fer et de potasse. (Fig. 226.) Les axes optiques sont dans le plan de symétrie. $p\xi = 98° 51'$. [Mill.]. — Double réfraction positive. [de Sén.].

Sulfate double de magnésie et de potasse. Isomorphe et optiquement semblable au sulfate double de potasse et de fer (voyez celui-ci). $p\xi = 99° 21' - 100° 25'$. AB = 51° 6'. $\beta = 1{,}487$. Positif. [de Sén.].

Sulfate double de nickel et d'ammoniaque. Isomorphe et optiquement semblable au sulfate double de potasse et de fer (voyez celui-ci). $p\xi = 102° 1'$. $\beta = 1{,}498 - 1{,}500$. Positif. [de Sén.].

Sulfate double de nickel et de potasse. Isomorphe et optiquement semblable au sulfate double de potasse et de fer (voyez celui-ci). $p\xi = 96° 56' - 97° 32'$. AB = 54° 2'. $\beta = 1{,}489 - 1{,}492$. Positif. [de Sén.].

Sulfate double de zinc et d'ammoniaque. Isomorphe et optiquement semblable au sulfate double de potasse et de fer (voyez celui-ci). $p\xi = 100° 8'$; $\beta = 1{,}491$. Positif. [de Sén.].

Sulfate de protoxyde de fer. (Fig. 225.) $mm' = 82° 21'$: $ph = 75° 40'$. Clivage parallèle à p. Les axes optiques sont dans le plan de symétrie. Une de leurs bissectrices est voisine de pp' et se comporte par rapport au caractère de double réfraction comme la bissectrice de l'angle obtus des axes de la topaze. — AB = c. 90°. $\alpha = 1{,}494$. [Br.]. — $\mu = 1{,}515$. [N.].

Sulfate de soude. Sel de Glauber. (Fig. 239.) $mm' = 99° 48'$; $ph = 72° 16'$; $hc = 49° 15'$; $ee' = 80° 24'$; — $p\xi = 12° 24'$; AB = 80° 26'; $\beta = 1,44$. [Mi.].

Sulfato-carbonate de plomb. Négatif. [Br.].

Tartrate d'ammoniaque. (Fig. 220.) $pg = 49° 36'$; $pf' = 52° 31'$; $ee' = 69° 56'$. — $p\xi = 16° 24'$. AB = 39° 1'. $\beta = 1,578$. [Mi.]. — $p\xi = 16° 43'$. $\beta = 1,534 — 1,533$ [de Sén.].

Tartrate de potasse et d'ammoniaque. — Les axes optiques sont dans le plan de symétrie.

Tartrate neutre de potasse. (Fig. 233.) $ee' = 45° 20'$; $if' = 52° 42'$; $ig = 37° 47'$. — $f'\xi = 21° 20'$; AB = 118°. $\beta = 1,526$. [Mi.].

C. CRISTAUX TRIKLINIQUES.

Jusqu'à présent on n'est pas parvenu à trouver entre la forme cristalline et les propriétés optiques des cristaux trikliniques une relation qui permette de déduire de celle-là la position des axes optiques. De même que la valeur des indices principaux, la position des trois axes d'élasticité change en général aussi d'une couleur à une autre, d'une quantité toutefois très-petite, de sorte que les axes optiques pour les différents rayons se groupent en faisceaux peu divergents. Les axes optiques ne sont pas dans un même plan, pas plus que leurs bissectrices ne se confondent.

Acide racémique. Les axes pour les différentes couleurs sont presque distribués comme dans le succinate d'ammoniaque. [Neum.].

Axinite. (Fig. 247.) $Pr = 45°$. Les faisceaux des axes optiques sont perpendiculaires à l'arête Pr, la bissectrice de leur angle aigu l'est sur r. AB = 107°. Les axes pour les différentes couleurs sont distribués comme dans le borax. Les bissectrices des angles obtus se confondent (dans le borax ce sont les bissectrices des angles aigus), mais les plans et les angles des axes optiques changent d'une couleur à l'autre. [Haid.]. — $\mu = 1,735$. [Br.].

Bichromate de potasse. (Fig. 249.) Clivage facile parallèlement à a, b, et c. M. de Sénarmont donne pour l'inclinaison de ces faces 91° 52', 31° 38', 83° 35'. Le dernier angle est sans doute ea'. Le second angle doit être probablement 91° 38', puisque la face b est presque perpendiculaire à a et à e. Le plan des axes optiques est perpendiculaire à l'arête ea'. Un des faisceaux d'axes se confond avec la normale à a; le second faisceau est éloigné du premier d'environ 45°. — Les axes pour les diverses couleurs sont pour les deux faisceaux, dans des plans qui sont à peu près perpendiculaires au plan

des faisceaux ; dans le premier faisceau la divergence est moindre que dans le second. [Nörr.]. — Double réfraction positive.

Cyanite. (Fig. 248.) $ab = 73° 45'$; $bc = 79° 10'$; $ac = 86° 45'$. Clivage très-facile parallèlement à b. — La normale à b est la bissectrice de l'angle aigu, $h\xi = c.\ 55°$. Les axes pour les différentes couleurs se confondent presque. — AB = 81° 48'. Positif. [Br.].

Succinate d'ammoniaque. Dans un des faisceaux, les axes sont dans le plan passant par les deux faisceaux ; dans le second ils sont tout à fait dissymétriquement placés par rapport à ce plan. [Neum.].

Sulfate de cuivre. (Fig. 250.) $cb = 30° 53'$; $ca = 56° 50'$; $ce = 52° 20'$. Un des faisceaux d'axes tombe presque sur l'axe AA' de la zone ce et est alors presque parallèle à l'arête ce. Le plan des deux faisceaux passe presque par le pôle e et est alors presque perpendiculaire à la face e. AB = $c.$ 45°. Négatif. Les axes des différentes couleurs ne se séparent pas d'une manière bien sensible. $\alpha = 1,552$; $\gamma = 1,531$. [Br.].

Nous indiquons enfin dans ce qui suit les données optiques de cristaux, dont nous ne trouvons pas le système déterminé ou dont la détermination imparfaite ne permet pas de les placer dans un système déterminé.

Azotate de bismuth. $\alpha = 1,89$; $\gamma = 1,67$. [He.]. — $\mu = 1,446$. [Mx.].

Azotate de chaux. $\mu = 1,410$, $\mu = 1,427$. [Br.].

Azotate de mercure. Suivant M. Babinet, les axes optiques des diverses couleurs sont symétriquement disposés par rapport à un plan passant par les bissectrices des deux faisceaux et perpendiculaire à leur plan. Les plans de chaque paire d'axes se coupent suivant la bissectrice de l'angle obtus. On pourrait présumer d'après cela que ce sel appartient au système monoclinique, et que la bissectrice de l'angle obtus coïncide avec l'axe de symétrie.

Azotate de zinc. AB = $c.$ 40°. [Br.].

Benzoate d'ammoniaque. AB = 45° 8'. Positif. [Br.]. — AB = 48° 8'. [Mx.].

Bicarbonate d'ammoniaque. Le seul cristal, suivant Herschel, où les axes pour les différentes couleurs paraissent coïncider rigoureusement.

Carbonate de potasse. AB = 80° 30'. [Br.].

Chlorure de magnésium. $\mu = 1,416$. [W.].

Chlorure de zinc. $\mu = 1,425$. [Br.].

Hydrate de baryte. AB = 13° 18'. Négatif. [Br.].

Hyposulfate de soude. AB = 89° 20'. [Br.].

Hyposulfite de chaux. $\alpha = 1,628$. $\gamma = 1,583$. [He.].

Hyposulfite de strontiane. Les axes pour les différentes couleurs sont disposés comme dans le sucre. $\alpha = 1{,}651$; $\gamma = 1{,}608$. [He.].

Sulfate double de magnésie et de soude. AB = 46° 49′. [Br.].

Sulfo-muriate de magnésie et de fer. AB = 51° 16′. Négatif. [Br.].

Dans un travail récent de M. Heusser sur la réfraction de la lumière colorée dans les milieux cristallisés (*Annales de Pogg.* LXXXVII), on trouve les données suivantes :

1. SPATH PESANT.

RAYONS.	α	β	γ	$2Z_1$
B	1,64415	1,63370	1,63258	36° 25′ 29″
C	1,64521	1,63476	1,63262	36 . 43 . 15
D	1,64797	1,63745	1,63362	36 . 47 . 37
E	1,65167	1,64093	1,63630	37 . 19 . 11
F	1,65484	1,64393	1,64266	37 . 51 . 36
G	1,66060	1,64960	1,64829	38 . 15 . 47
H	1,66560	1,65436	1,65301	38 . 25 . 44

2. TOPAZE.

Dans un échantillon de topaze on trouve pour les rayons verts (entre *E* et F) $\alpha = 1{,}62898$; $\beta = 1{,}61965$; $\gamma = 1{,}61800$.

3. APATITE.

RAYONS.	ω	ε
D	1,64607	1,64172
E	1,64998	1,64545
F	1,65332	1,64867
G	1,65953	1,65468

4. BÉRIL.

Pour les rayons verts : $\varepsilon = 1{,}57068$, $\omega = 1{,}57513$.

5. TOURMALINE.

Pour les rayons verts : $\omega = 1{,}64793$, $\varepsilon = 1{,}62617$.

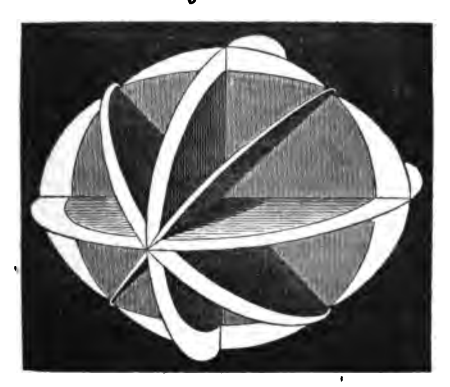
CHAPITRE XII.

Appareils pour faciliter l'étude du mouvement de la lumière dans les milieux cristallisés.

Dans aucune partie de la physique il n'est aussi nécessaire de pouvoir se représenter matériellement les phénomènes que dans l'étude de la lumière. C'est pour cela que les modèles ont alors une très-grande importance. Nous avons déjà décrit un appareil dans la première partie : il servait à rendre sensible le mouvement de la lumière dans les milieux isotropes. Parmi les modèles destinés à faire comprendre les lois optiques dans les milieux cristallisés, nous indiquerons d'abord ceux destinés à représenter la surface de l'onde.

Il est facile de se figurer la surface de l'onde des cristaux à un axe et on n'a pas besoin de modèles matériels. Mais pour bien se faire une idée de celle des cristaux à deux axes, dans lesquels elle est moins simple, on découpe les sections principales dans une feuille de carton et on les assemble de la manière convenable (Figure 251). En peignant en noir la portion du carton qui se trouve dans l'enveloppe interne de la surface, on obtient par les bords de la partie noire et par ceux de la feuille de carton elle-même les sections principales de la surface. Les portions qui restent non noircies sont entre l'enveloppe externe et l'enveloppe interne de la surface. Il est bon, outre les sections principales, de marquer encore d'autres sections, surtout celles dont les plans passent par la normale aux axes optiques et un axe optique secondaire. On peut prendre sans erreur sensible, pour une pareille section, deux cercles qui passent respectivement par les points singuliers, et par deux des quatre sommets situés sur la normale aux axes optiques, un sommet extérieur et le sommet intérieur diamétralement opposé.

Fig. 251.



Une manière de représenter la surface de l'onde un peu différente de celle-là serait de figurer les sections principales et quelques autres par des fils métalliques.

M. Soleil, opticien distingué de Paris, a construit en plâtre le modèle de la surface de l'onde. Une portion représente un octant de l'espace limité par l'enveloppe interne; la seconde partie est limitée par un octant de l'enveloppe externe et les trois sections principales. En outre sur les deux morceaux on dessine encore les sections faites par des plans menés par la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques, de même que sur le second morceau on trace les cercles de contact des plans tangents singuliers.

La surface de l'onde que fit construire Magnus (fig. 252), et que possède

Fig. 252.





Plücker, est un véritable objet d'art. Le modèle est en bois dont la masse remplit l'espace compris entre les deux enveloppes. Il est partagé en zones et peut se diviser aussi bien suivant les sections principales que suivant les deux plans menés par l'axe de moyenne élasticité (la normale aux axes optiques) et chaque axe optique. De cette manière on a en même temps une représentation de l'enveloppe externe et de l'enveloppe interne de la surface et des cinq sections que nous venons de dire. Les dimensions principales du modèle sont : $2a = 110^{mm}$, $2b = 146^{mm}$, $2c = 168^{mm}$.

La surface de l'onde donne seulement un aperçu immédiat du mouvement des rayons. Pour en obtenir un semblable du mouvement des ondes planes, l'auteur a employé le mode de représentation suivant (1). Sur une sphère d'environ 12 centimètres de diamètre, on dessine les sections des cônes de

(1) Voyez. *Sur une nouvelle manière de représenter la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux à deux axes.* Archives de Grunert. Partie XVI.

vitesse dont les sommets sont au centre. Ces sections ne sont autre chose que des ellipses sphériques confocales, qui sont décrites autour de leurs foyers sur la surface sphérique, absolument de la même manière que les ellipses ordinaires sur un plan. Soient A_1 A_1' (figure 253), les extrémités du diamètre

Fig. 253.

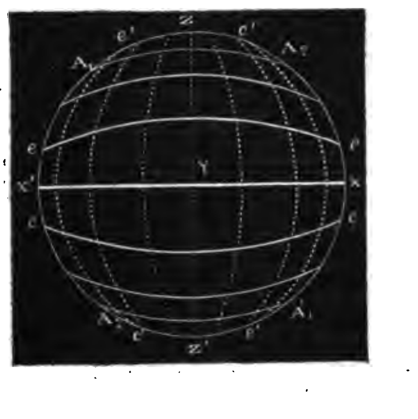


Fig. 254.

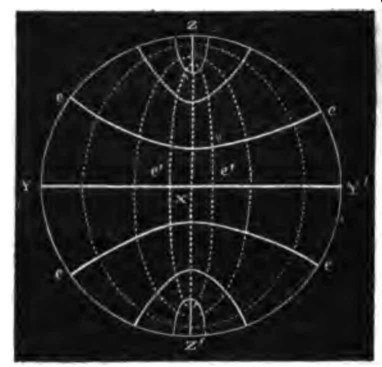


Fig. 255.

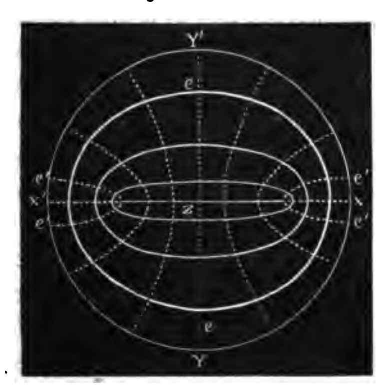
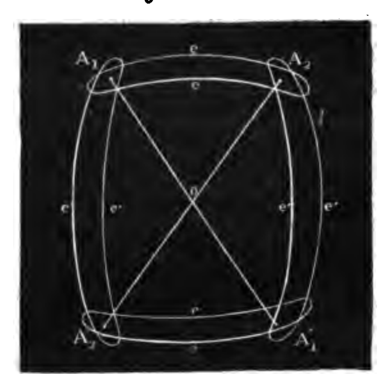


Fig. 256.



parallèle à un axe optique, et A_1 A_2' celles d'un diamètre parallèle à l'autre axe. Alors, s'il s'agit par exemple d'un cristal négatif, la surface de la sphère sera coupée par les cônes auxquels correspond la plus grande vitesse, suivant les ellipses e, dont les supérieures ont pour foyers les points A_1 et A_2 et les inférieures les points A_1' et A_2'. Comme limite de ces ellipses nous avons d'un côté les portions A_1 A_2 et A_1' A_2' du grand cercle mené par les axes optiques ; la seconde limite est le grand cercle passant par la normale aux axes optiques et la bissectrice de leur angle obtus.

Le second groupe des cônes de vitesse correspondants aux ondes les plus lentes, coupe la sphère suivant les ellipses e'. Parmi celles-ci, celles de droite ont pour foyers les points A_1' et A_2, celles de gauche les points A_1 et A_2'. Leurs limites sont les arcs A_2 A_1' et A_1 A_2', ainsi que le grand cercle mené par l'axe de moyenne élasticité et la bissectrice de l'angle aigu des axes optiques. Les deux groupes d'ellipses sont distingués sur le modèle par des teintes différentes.

D'après ce que nous avons développé page 261 et suivantes, il résulte qu'en tous les points d'une de ces ellipses passent les normales d'une série d'ondes planes, dont les vibrations sont tangentes à la surface de la sphère et perpendiculaires à l'ellipse, et que la vitesse de toutes ces ondes est la même. Mais cette vitesse change d'une ellipse à l'autre, et pour en représenter les changements, le trait elliptique est d'autant plus large que la vitesse qui lui correspond est plus grande. Ainsi dans le cas supposé d'un cristal négatif, l'épaisseur des ellipses e augmente des limites A_1 A_2 et A_1' A_2' jusqu'à la limite xyx', elle diminue au contraire, si nous passons dans le groupe des ellipses e' des limites A_1' A_2 et A_1 A_2' à la limite zyz'. En tous les points de la section principale xz, la vitesse est partout égale à b, dans la section xy elle est c, enfin dans la section yz elle a pour valeur a.

Maintenant pour se faire au moyen de ce modèle une idée de la propagation de la lumière suivant une certaine direction, on mène un rayon parallèle à cette direction, soit p son extrémité. Suivant cette direction se propagent alors deux ondes planes, dont les vibrations sont parallèles aux tangentes à la sphère perpendiculaires aux ellipses e et e', qui se croisent au point p. Et les vitesses de ces vibrations sont représentées par l'épaisseur des ellipses auxquelles elles sont perpendiculaires.

Pour terminer nous donnerons la description de la *machine ondulatoire de Fessel*, qui sert à mettre en évidence le fait de la double réfraction. Avec cette machine on peut aussi faire voir la division d'un rayon incident polarisé en ligne droite, en deux rayons polarisés elliptiquement, comme cela arrive par la réfraction dans certains milieux; toutefois n'ayant pas étudié ces milieux dans le cours de cet ouvrage, parce qu'ils ne sont qu'exceptionnels, nous nous bornerons ici à examiner le jeu de la machine seulement dans le cas de la réfraction dans un milieu de structure normale.

Dans l'étage inférieur de la boîte D (figure 257), peuvent glisser à côté l'un de l'autre, les trois tiroirs A, B et C. Ceux-ci sont tout à fait disposés comme le tiroir 1) de l'appareil décrit à la fin de la première partie; ils renferment une lame de laiton ployée d'abord en zigzags ondulatoires, en forme d'ondes,

et prolongée ensuite en une surface plane. A chacun d'eux correspond une longueur d'onde particulière. Les amplitudes des ondes des tiroirs latéraux

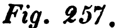
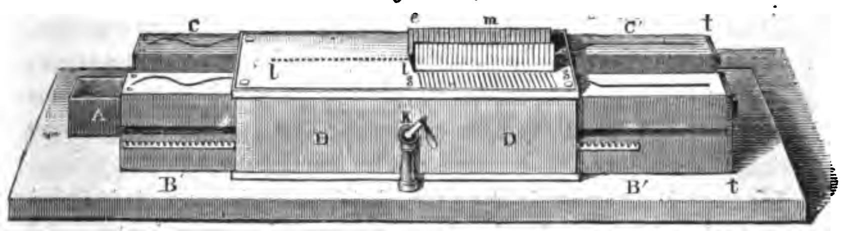
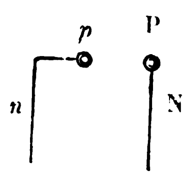


Fig. 257.





B et C sont égales entre elles et sont à l'amplitude de A comme Sin. 45° : 1, c'est-à-dire, comme 1 : $\sqrt{2}$. La longueur d'onde du tiroir moyen a 13 pouces et celles des tiroirs extérieurs 8 et 9 pouces. Les longueurs d'ondes sont donc entre elles à peu près comme celles du rayon lumineux dans l'air, du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire le plus rapide dans le spath d'Islande. Le mouvement des tiroirs s'opère au moyen de la manivelle K. L'axe de cette dernière porte à cet effet trois pignons qui engrènent avec des crémaillères fixées sur la longueur des tiroirs. Le pignon qui engrène sur la crémaillère de A a 26 dents, les deux autres en ont 16 et 18, de manière qu'en tournant la manivelle les tiroirs s'avancent avec des vitesses proportionnelles à leurs longueurs d'ondes.

Dans les parties latérales de l'étage supérieur de D se trouvent deux tiroirs dont chacun correspond au tiroir placé en dessous dans l'étage inférieur, de la même manière que le tiroir 1') correspond au tiroir 1) dans l'appareil déjà cité. De même aussi, comme dans ce dernier, les deux tiroirs superposés peuvent être liés l'un à l'autre au moyen d'une tête à vis en bois. Le couvercle et le fond de l'étage supérieur sont formés de deux plaques de laiton travaillées de la même manière, dont la figure représente la plaque supérieure. Celle-ci est percée suivant la ligne médiane ll' d'une série de trous également espacés. En outre des deux côtés de cette ligne médiane et à une certaine distance, sont pratiquées deux séries de fentes dont la figure en représente

une désignée par *ss*. Les entailles d'une seule et même série sont également distantes les unes des autres, et sont perpendiculaires à la ligne médiane. Mais les deux séries sont placées de telle manière qu'une fente dans l'une correspond à l'intervalle entre deux fentes dans l'autre.

Auprès des bords de ces deux séries situés du côté de la ligne moyenne, s'élèvent perpendiculairement les deux lames de laiton *m*. Celles-ci sont fendues depuis leur arête supérieure presque jusqu'à leur base, de telle façon que les entailles des plaques *m* correspondent exactement aux fentes horizontales voisines.

Les trous *ll* du couvercle et du fond de l'étage supérieur sont destinés à recevoir des aiguilles N de même longueur, terminées par un bouton, et à permettre à celles-ci un mouvement de bas en haut et de haut en bas pendant que leurs parties inférieures reposent sur l'onde du tiroir A. Par les fentes horizontales et la fente onduleuse des tiroirs supérieurs, on fait descendre les extrémités verticales des aiguilles recourbées *n*, jusqu'à la surface ondulatoire du tiroir de l'étage inférieur. Mais les bras horizontaux des aiguilles *n*, qui sont terminés à leur extrémité par un bouton *p*, sont introduits dans les fentes verticales correspondantes des plaques *m*. Chacune des aiguilles *n* peut alors se mouvoir aussi bien de haut en bas et de bas en haut que perpendiculairement à l'axe de l'appareil dans une direction horizontale d'avant en arrière, et il n'y a que ces deux mouvements de possible. Les boutons des aiguilles *n* se trouvent dans l'espace libre entre les deux plaques *m*; ils sont de même grosseur, mais plus petits que ceux des aiguilles N, et les petites têtes de toutes les aiguilles qui sont sur un des trois tiroirs A, B, C, ont une couleur particulière.

Pour faire comprendre le jeu de cette machine, nous allons admettre que les tiroirs inférieurs sont placés de telle manière, que la partie plane de la feuille de laiton qui se trouve dans chacun d'eux, commence dans le plan E mené par les arêtes verticales *e* des plaques *m* au milieu de l'appareil, et que l'on ait tourné ensuite la manivelle K, jusqu'à ce que toutes les aiguilles soient amenées sur la portion plane des tiroirs inférieurs et que les aiguilles *n* traversent la portion rectiligne des fentes onduleuses, qui se trouvent dans les tiroirs latéraux supérieurs. Alors toutes les têtes des aiguilles sont sur une ligne droite parallèle à la ligne centrale. A gauche du plan E sont tous les boutons P, à droite les boutons *p*; dans la série de ces derniers, les boutons diversement colorés des tiroirs B et C se suivent en alternant. En outre les tiroirs supérieurs doivent, au moyen des vis qui sont placées à leur tête, être déplacés par rapport aux tiroirs inférieurs correspondants, d'une longueur

d'onde et d'une demi-longueur d'onde. Enfin, tout étant ainsi disposé, si nous tournons la manivelle, de manière que les tiroirs se meuvent de C vers C', on observera ce qui suit.

Aussitôt que la partie onduleuse de la lame de laiton dans le tiroir A, dont la vitesse est la plus grande, vient au-dessous des aiguilles N, les boutons de celles-ci prennent le mouvement des molécules d'éther dans un rayon polarisé rectilignement et horizontalement et se propagent dans la direction CC'. En attendant, les aiguilles n et leurs boutons restent en repos. Mais aussitôt que la partie onduleuse de la plaque de laiton en A est arrivée au plan E, les boutons p commencent aussi à osciller et cela successivement et d'autant plus tard qu'ils sont plus loin du plan E. Les boutons correspondants à un des tiroirs latéraux B et C présentent le même mouvement que les molécules d'éther d'un rayon lumineux polarisé en ligne droite. Mais l'amplitude, la longueur d'onde, la vitesse et le plan d'oscillations sont différents tant pour le tiroir B que pour le tiroir C et que pour le tiroir A. Seulement la phase est la même dans ces trois mouvements. Les plans d'oscillation des mouvements ondulatoires correspondants à B et à C sont, comme le comporte la position mutuelle des tiroirs supérieurs et inférieurs, inclinés d'un angle de 45° sur le plan d'oscillations vertical des boutons P, et en outre un de ces plans est dans un azimuth + 45°, tandis que l'autre est dans l'azimuth — 45°, par conséquent perpendiculaire au premier. D'après cela et d'après les rapports donnés plus haut entre les amplitudes, les longueurs d'ondes et les vitesses des trois mouvements, on voit l'analogie entre ceux-ci et le mouvement lumineux dans un rayon homogène polarisé en ligne droite, tombant perpendiculairement sur une lame de spath d'Islande parallèle à l'axe optique, de manière que son plan d'oscillations forme avec la section principale du cristal des angles égaux. Les boutons P représentent le mouvement dans l'air. De l'air le mouvement pénètre par le plan E dans le milieu cristallisé, dont les sections principales sont inclinées de 45° par rapport à un plan vertical. Les molécules d'éther du cristal sont figurées par les boutons p et ceux-ci montrent les mouvements des deux composantes suivant lesquelles le mouvement est décomposé dans l'intérieur du cristal. En effet les amplitudes des composantes s'expriment, comme la théorie l'indique, par Cos. 45° × l'amplitude du rayon incident; leurs plans d'oscillations sont dans les sections principales, et leurs vitesses et leurs longueurs d'onde sont dans les rapports de $\frac{13}{8}$ et $\frac{13}{9}$ avec celles du rayon incident. Mais les rapports $\frac{13}{8}$, $\frac{13}{9}$ s'écartent peu des indices principaux 1,65 et 1,48 du spath d'Islande. La durée des vibrations est enfin la même pour les trois mouvements, de même la phase a été primitivement rendue la même pour tous trois.

Si l'on tourne la manivelle K, de manière que les tiroirs aillent de C′ en C, l'appareil montre comment les rayons réfractés ordinaire et extraordinaire, lorsque le mouvement repasse par le plan E du cristal dans l'air, se composent en un rayon polarisé en ligne droite, dont les attributs satisfont aux exigences de la théorie.

Les figures 258, 259 et 260 donnent la position des boutons au moment

Fig. 258.



Fig. 259.



Fig. 260.



où ils se trouvent déjà tous en mouvement. La figure 258 est une vue latérale, la figure 259 une vue d'en haut, et la figure 260 une vue antérieure.

La machine décrite a 1 mètre 26 centimètres de longueur, 30 centimètres de largeur et 20 centimètres de hauteur.

SUPPLÉMENT

A LA PREMIÈRE PARTIE

CONTENANT LES

TABLEAUX DES INDICES DE RÉFRACTION DES MILIEUX ISOTROPES.

TABLEAU I.

NOMS DES GAZ.	DENSITÉS.	PUISSANCES réfractives absolues.
Air atmosphérique.	1,00000	0,000589171
Acide carbonique.	1,51961	0,000899573
Acide chlorhydrique.	1,24740	0,000879066
Ammoniaque.	0,59669	0,000672349
Azote.	0,96913	0,000590204
Hydrogène.	0,07321	0,000285315
Oxygène.	1,10359	0,000560204

TABLEAU II.

NOMS DES GAZ.	DENSITÉS.	INDICES absolus de réfraction.	PUISSANCES réfractives absolues.
Acide carbonique.	1,524	1,000449	0,000899
Acide chlorhydrique.	1,254	1,000449	0,000899
Acide cyanhydrique.	0,944	1,000451	0,000903
Acide sulfhydrique.	1,178	1,000644	0,001288
Acide sulfureux.	2,247	1,000665	0,001331
Air atmosphérique, d'après Arago et Biot	1,000	1,000294	0,000589
Ammoniaque	0,591	1,000385	0,000771
Azote	0,976	1,000300	0,000601
Bioxyde d'azote.	1,039	1,000303	0,000606
Protoxyde d'azote.	1,527	1,000503	0,001007
Chlore	2,47	1,000772	0,001545
Cyanogène.	1,818	1,000834	0,001668
Ether chlorhydrique.	2,234	1,001095	0,002191
Gaz des marais.	0,559	1,000443	0,000886
Gaz oléfiant.	0,980	1,000678	0,001356
Gaz oxy-chloro-carbonique.	3,442	1,001159	0,002318
Hydrogène.	0,0685	1,000138	0,000277
Hydrogène phosphoré.	1,256	1,000789	0,001579
Oxyde de carbone.	0,972	1,000340	0,000681
Oxygène.	1,1026	1,002722	0,000544
Vapeur d'éther.	2,580	1,00153	0,003061
Vapeur de sulfure de carbone. . .	2,644	1,00150	0,00301

TABLEAU III.

MILIEUX RÉFRINGENTS.	POIDS spécifiques.	INDICES DE RÉFRACTION POUR LES RAYONS						
		B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
1) LIQUIDES.								
Dissolution de potasse à 9°	1,416	1,399629	1,400515	1,402805	1,405632	1,408082	1,412579	1,416368
Eau à 15° R	1,000	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
Eau à 15°	1,000	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
Essence de térébenthine à 8° 1/2	0,885	1,470496	1,471530	1,474434	1,478353	1,481736	1,488198	1,493874
2) SOLIDES.								
Crown-glass N° 9 à 14°	2,535	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566
Crown-glass N° 13	2,535	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,544684
Crown-glass M.	2,756	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150	1,566741	1,573535	1,579470
Flint-glass N° 3	3,512	1,602042	1,603800	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373
Flint-glass N° 13 à 15°	3,723	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062
Flint-glass N° 23. Angle réfringent 45° 23'14''	3,724	1,626564	1,628451	1,635666	1,640544	1,646780	1,658849	1,669680
Flint-glass N° 23. Angle réfringent 60° 15'42''	3,724	1,626596	1,628469	1,635667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669686
Flint-glass N° 30	3,695	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356	1,643466	1,655406	1,666072

TABLEAU IV.

MILIEUX RÉFRINGENTS.	POIDS spécifiques.	Température.	INDICES DE RÉFRACTION POUR LES RAYONS						
			B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Acide azotique.	1,467	18°,6	1,3988	1,3998	1,4026	1,4062	1,4092	1,4155	1,4206
» chlorhydrique	1,162	18°,6	1,4050	1,4065	1,4095	1,4130	1,4160	1,4217	1,4261
» pyroligneux.	1,060	16°,2	1,3729	1,3745	1,3760	1,3785	1,3807	1,3848	1,3884
» sulfurique	1,835	18°,6	1,4321	1,4329	1,4351	1,4380	1,4400	1,4440	1,4463
Alcool	0,815	17°,6 C	1,3628	1,3635	1,3654	1,3675	1,3696	1,3733	1,3761
Baume du Pérou	...	19°,2	1,585	1,587	1,593	1,603	1,613	1,634	1,655
Créosote	...	18°,2	1,53196	1,53383	1,53833	1,54523	1,55153	1,56390	1,57436
Dissolution d'acétate basique de plomb.	...	15°	1,3350	1,3357	1,3373	1,3398	1,3417	1,3453	1,3481
» d'acétate neutre de plomb.	...	19°	1,3429	1,3437	1,3455	1,3480	1,3498	1,3538	1,3571
» d'azotate de bismuth . .	...	22°	1,3306	1,3315	1,3332	1,3355	1,3374	1,3410	1,3437
» d'azotate de mercure . .	...	21°,6	1,3408	1,3419	1,3439	1,3462	1,3487	1,3528	1,3560
» d'azotate de plomb. . .	...	17°,8	1,3455	1,3461	1,3482	1,3506	1,3528	1,3568	1,3600
» de chlorure de baryum. .	...	21°,8	1,3392	1,3398	1,3419	1,3442	1,3462	1,3499	1,3528
» de chlorure de calcium. .	...	22°,2	1,4006	1,4016	1,4040	1,4070	1,4099	1,4150	1,4190
» de chlorure de zinc. . .	...	22°	1,3351	1,3402	1,3421	1,3444	1,3466	1,3501	1,3534
» de chromate de plomb dans l'acide azotique . . .	...	18°,6	1,369	1,372	1,374	1,376	1,379	1,384	1,389
» de chromate de potasse .	...	20°,2	1,351	1,352	1,353	1,357	1,360	1,364	...

» de potasse caustique. . .	1,42	16°	1,4024	1,4036	1,4061	1,4091	1,4117	1,4162	1,4199
» de salpêtre.	...	22°,2	1,3457	1,3468	1,3487	1,3510	1,3533	1,3586	1,3608
» de sel ammoniac. . . .	...	22°,2	1,3499	1,3508	1,3529	1,3552	1,3575	1,3617	1,3650
» de soude pure. . . .	1,34	16°	1,4036	1,4039	1,4075	1,4109	1,4134	1,4181	1,4221
» de sulfate de magnésie, .	...	22°,2	1,3434	1,3442	1,3462	1,3486	1,3504	1,3540	1,3570
» de sulfate de soude. . .	...	22°	1,3392	1,3398	1,3419	1,3442	1,3462	1,3499	1,3528
Eau distillée.	...	15°,8	1,3317	1,3326	1,3343	1,3364	1,3386	1,3429	1,3448
Essence d'angélique.	...	21°	1,484	1,486	1,489	1,495	1,496	1,505	1,509
» d'anis.	...	15°,1	1,54805	1,55080	1,55725	1,56590	1,57435	1,59120	1,60842
» »	...	20°,9	1,54507	1,54736	1,55345	1,56235	1,57077	1,58815	1,60527
» » probablement altérée.	...	15°,25	1,5482	1,5504	1,5563	1,5650	1,5733	1,5901	1,6066
» de cassia deux fois distillée.	...	10°	1,5963	1,6007	1,6104	1,6249	1,6389	1,6698	1,7039
» » » . .	...	14°	1,5945	1,5979	1,6073	1,6207	1,6358	1,6671	1,7025
» » » . .	...	22°,5	1,5895	1,5930	1,6026	1,6174	1,6314	1,6625	1,6985
» de cumin.	...	22°,1	1,502	1,504	1,507	1,513	1,520	1,532	1,543
» de piment.	...	19°,8	1,528	1,532	1,535	1,542	1,548	1,559	1,571
» de sassafras.	...	17°,2	1,52575	1,52750	1,53215	1,53870	1,54485	1,55750	1,56935
Solution ammoniacale.	0,898	15°	1,345	1,346	1,348	1,350	1,353	1,355	1,360
Sulfure de carbone.	...	15°,65	1,61825	1,62190	1,63083	1,64386	1,65550	1,67993	1,70196

TABLEA[U]

Nos.	NOMS DES VERRES.	DENSITÉ.	TEMPÉRATURE en degrés centigrades à laquelle fut prise la densité.	TEMPÉRATURE en degrés centigrades à laquelle fut mesuré l'indice de réfraction.
1.	Flint-glass jaune de Guinand avec acide borique.	3,417	10°,00	19°,00
2.	Flint-glass de Frauenhofer.	2,135	8,75	14,25
3.	Flint-glass de Bontemps.	2,011	8,75	18,25
4.	Flint-glass ordinaire de Guinand. . . .	3,610	10,00	16,00
5.	Flint-glass de Guinand avec acide borique.	4,322	»	15,00
6.	Autre Flint-glass de Guinand avec acide borique.	3,559	10,00	16,00
7.	Ancien Flint-glass de Guinand (blanc). . .	2,622	10,00	18,5
8.	Verre de Guinand avec acide borique. . .	2,642	10,00	15,5
9.	Verre de Guinand avec acide borique. . .	2,613	10,00	14,0
10.	Crown-glass ordinaire de Guinand. . . .	2,184	8,5	17,5
11.	Verre de Venise.	2,713	9,7	18,00
12.	Crown-glass de Guinand avec acide borique.	2,362	9,00	16,00
13.	Crown-glass de Dollond.	2,484	10,00	11,5
14.	Verre avec acide borique et une nouvelle base de Maës et Clémandot (Clichy). . .	2,835	9,5	16,00
15.	Crown-glass de Bontemps.	2,447	10,00	16,00
16.	Verre de Maës et Clémandot avec acide borique et une nouvelle base.	1,951	8,5	17,25
17.	Idem, autre espèce.	1,523	8,5	17,5
18.	Verre de Saint-Gobain.	2,329	8,5	19,25

ANGLES réfringents des prismes employés.	INDICES DE RÉFRACTION POUR LES RAYONS.						
	B	C	D	E	F	G	H
35°15'2"	1,769702	1,771761	1,777664	1,785254	1,792420	1,806195	1,818597
36.24.50	1,701050	1,702642	1,707264	1,713134	1,718673	1,728423	1,738154
35. 5.22	1,691900	1,693496	1,697967	1,703518	1,708917	1,718725	1,727522
39.50.30	1,690979	1,692469	1,696812	1,702485	1,707645	1,717494	1,726140
60. 5.50	1,690627	1,692252	1,696515	1,702177	1,707312	1,717111	1,725883
39.57.37	1,687700	1,689227	1,693455	1,699105	1,704138	1,713777	1,722155
60. 0.52	1,686612	1,688954	1,692418	1,698082	1,703186	1,712957	1,721645
60.37.56	1,618376	1,619340	1,622091	1,625459	1,628388	1,633945	1,638699
60. 1.44	1,616036	1,616797	1,619538	1,622984	1,625938	1,631390	1,635902
39.55.40	1,611668	1,612624	1,615193	1,618529	1,621274	1,626532	1,630805
59.58.45	1,610960	1,611960	1,614367	1,617718	1,620625	1,625994	1,630453
60. 0.53	1,611145	1,612126	1.614571	1,617780	1,620620	1,625817	1,630181
59.57.32	1,607933	1,608933	1,611428	1,614660	1,617457	1,622696	1,627094
35.29.50	»	»	1,604759	1,607906	1,610759	1,615929	1,620035
60. 7.30	1,596879	1,597770	1,600233	1,603323	1,606123	1,611211	1,615640
35.34.22	1,596664	1,597699	1,600093	1,603116	1,605892	1,610737	1,614820
34,55.14	1,595820	1,596606	1,59940	2,602758	1,607068	1,610425	1,614544
59.34.22	1,586757	1,587683	1,590112	1,593036	1,595808	1,600642	1,604761

TABLEAU VI.

Les savants cités dans la seconde colonne sont : Biot (Bi.), — Brewster (Br.), — Barlow (Brl.), — Boscovich (Bsc.), — Cavallo (C.), — Euler fils (E.), — Faraday (F.), — Herschel fils (H.), — Jamin (J.) [Parmi les indices de réfraction mesurés par M. Jamin, ceux marqués d'un astérisque ont été déduits de la valeur de l'angle d'incidence principale et se rapportent à la lumière rouge], — Malus (M.), — Mouro (Mr.), — Marx (Mx.), — Newton (N.), — Wollaston (W.) [Voyez page 42, la méthode employée par Wollaston. Comme Young le fait observer, les indices de Wollaston se rapportent au rouge extrême], — Young (Y.) [Les indices marqués Y ont été calculés par Young d'après les observations de Brewster].

Les substances à réflexion positive, négative ou neutre sont respectivement indiquées par les signes +, — ou 0.

A) LIQUIDES ET CORPS VISQUEUX.

1) ACIDES.

Acide acétique	Br.	1,396
Vinaigre	H.	1,372
» distillé	E.	1,344
Acide azoteux	Br.	1,396
»	Y.	1,404
Acide azotique	Br.	1,406
»	C.	1,412
» p. sp. 1,48	W.	1,410
» »	Y.	1,410
»	Mx.	1,391
Eau forte	H.	1,384
Acide carbonique. Liquéfié par la pression, il possède un indice bien plus faible que celui de l'eau	F.	
Acide chlorhydrique. Liquéfié par la pression, il possède un indice bien plus faible que celui de l'eau	F.	
Acide chlorhydrique	Br.	1,376
» fort	Br.	1,401
» très-concentré	Bi.	1,4098
» p. sp. 1,134	H.	1,392
Acide phosphorique hydraté, rendu liquide par la chaleur	Y.	1,423
» liquide	Br.	1,426
» »	Mx.	1,460
» fondu	Br.	1,532

TABLEAU VI. (Suite.)

Substance			
Acide sulfureux. Liquéfié par la pression, il réfracte la lumière autant que l'eau.		F.	
Acide sulfurique.		H.	1,430
»		W.	1,435
»		Br.	1,440
» p. sp. 1,7.		N.	1,428
» p. sp. 1,840.		Mx.	1,440
2) DISSOLUTIONS SALINES DANS DE L'EAU.			
Acétate de cuivre. Dissolution saturée.	—	J.	1,333
Acétate neutre de plomb. Dissolution saturée. . .	0	J.	1,379
Sous-acétate de plomb. Dissolution saturée . . .	—	J.	1,349
Alun. Dissolution saturée.		H.	1,356
Alun de chrome. Quantité de sel = $^{1}/_{4}$ de l'eau. .	—	J.	1,355
Azotate d'alumine		W.	1,410
Azotate de potasse. Dissolution saturée.	—	J.	1,357
» de soude $^{3}/_{8}$	—	J.	1,389
» de nickel $^{1}/_{5}$	0	J.	1,334
» de cuivre. Dissolution saturée.	+	J.	1,464
» » $^{75}/_{15}$	+	J.	1,457
» » $^{30}/_{8}$?	+	J.	1,439
» » $^{1}/_{1}$.	—	J.	1,399
» » $^{1}/_{2}$.	—	J.	1.366
» d'urane.	—	J.	1,349
Bichromate de potasse $^{1}/_{6}$.	—	J.	1,346
Chlorure de manganèse $^{1}/_{3}$	0	J.	1,350
» d'or $^{2}/_{13}$.	0	J.	1,342
» de platine $^{2}/_{13}$	—	J.	1,349
» »		W.	1,370
» de zinc. Dissolution saturée.	+	J.	1,548
» » $^{25}/_{15}$.	+	J.	1,455
» » $^{75}/_{75}$.	+	J.	1,443
» » $^{20}/_{30}$.	—	J.	1,401
» » $^{20}/_{60}$.	—	J.	1,371
Iodure de potassium $^{1}/_{4}$	—	J.	1,347
Perchlorure de fer $^{1}/_{6}$.	—	J.	1,372
Sel ammoniac. Dissolution concentrée.		Mx.	1,393
Sel marin. Dissolution saturée.		C.	1,375

TABLEAU VI. (Suite.)

Eau salée		Br.	1,343
Sulfate de cuivre. Dissolution saturée	—	J.	1,359
» de sesquioxyde de fer 7/4	0	J.	1,458
» » » 1/4	0	J.	1,431
» de soude 1/4	—	J.	1,344
3) HUILES GRASSES.			
Huile d'ambre		Br.	1,368
»		Y.	1,379
Huile d'amandes		W.	1,469
»		W.	1,470
»		Y.	1,481
»		Br.	1,483
Huile de baleine		Y.	1,483
»		Br.	1,471
Huile de spermaceti		Br.	1,470
»		Y.	1,473
»		Br.	1,471
»		Y.	1,470
Huile de buis		Y.	1,356
Huile de faînes		Br.	1,500
Huile de lin		W.	1,485
»		Y.	1,487
» p. sp. 0,932		N.	1,482
Huile de macis		Y.	1,512
»		Y.	1,526
» fondue		Y.	1,481
Huile de navet		Y.	1,475
»		Br.	1,475
Huile de noix		Y.	1,491
»		Br.	1,507
» probablement impure		H.	1,490
Huile de noix de catéchu		Y.	1,536
Huile d'olives		W.	1,469
»		Br.	1,470
»		H.	1,4705
»		Y.	1,476
» p. sp. 0,913		N.	1,467

TABLEAU VI. (Suite.)

Huile d'olives de Florence		Y.	1,485
» de Rhodes		Br.	1,500
» »		Y.	1,503
» »		Br.	1,505
Huile de palme		Y.	1,475
Huile de pavots		Br.	1,467
»		Y.	1,483
Huile de ricin		Br.	1,490
»		Y.	1,485
Huile de sainfoin		Br.	1,487
»		Y.	1,488
Huile de graine de tabac		Br.	1,547
4) HUILES ESSENTIELLES.			
Essence d'absynthe		Br.	1,453
»		Y.	1,485
»		Y.	1,489
»	+	J.	1,473
Essence d'amandes amères		Br.	1,603
Essence d'anet		Br.	1,477
»		Y.	1,487
Essence d'angélique		Y.	1,491
»		Br.	1,493
Essence d'anis		Br.	1,601
»		Y.	1,536
»	+	J.	1,555
Essence de badiane	+	J.	1,555
Essence de bergamotte		Br.	1,471
»		Y.	1,473
Essence de camomille		Br.	1,457
»		Y.	1,476
»	+	J.	1,456
Essence de cajeput		Y.	1,478
»		Br.	1,483
»	+	J.	1,465
Essence de citron		Br.	1,481
»		Y.	1,489
Essence de cassia		Y.	1,624

TABLEAU VI. (Suite.)

Essence de cassia	Y.	1,631
»	Br.	1,641
Essence de copahu +	J.	1,498
Camphre +	J.	1,461
Essence de carvi	Y.	1,483
»	Br.	1,491
» +	J.	1,489
Essence de cumin	Br.	1,508
»	Y.	1,578
Essence de cannelle	Y.	1,589
»	Y.	1,604
»	Y.	1,632
Essence de cire	C.	1,452
Essence de fenouil	Br.	1,506
»	Y.	1,507
» +	J.	1,492
Essence de genièvre	Br.	1,473
»	Y.	1,482
»	Y.	1,491
» +	J.	1,479
Essence de girofles	Y.	1,535
»	W.	1,539
» +	J.	1,535
Essence d'hysope	Br.	1,487
»	Y.	1,495
Essence de lavande	Br.	1,457
»	W.	1,467
»	Y.	1,475
» +	J.	1,462
Essence de laurier +	J.	1,540
Essence de marjolaine	Y.	1,490
»	Br.	1,491
Essence de muscade	Y.	1,491
»	W.	1,497
Essence de mélisse +	J.	1,480
Essence de menthe	W.	1,468
»	Y.	1,473
Essence de menthe aigue	Y.	1,496
»	Br.	1,481

TABLEAU VI. (Suite.)

Essence de pouliot.	Br.	1,482
»	Y.	1,485
Essence de piment.	Y.	1,503
»	Br.	1,507
»	Y.	1,510
» . . . . +	J.	1,531
Essence de poivre. . . . . +	J.	1,490
Essence de rue.	Br.	1,433
»	Y.	1,449
Essence de romarin.	Br.	1,469
»	Y.	1,472
» . . . . +	J.	1,472
Essence de sassafras.	Y.	1,522
»	Br.	1,532
»	W.	1,536
»	E.	1,544
» dans de l'alcool.	N.	1,405
Essence de sabine.	Br.	1,482
» . . . . +	J.	1,472
Essence de serpolet. . . . . +	J.	1,479
Huile essentielle de succin.	W.	1,505
»	Y.	1,507
Essence de thym	Br.	1,477
»	Y.	1,486
Huile essentielle de vin.	Y.	1,579
Huile essentielle de naphte.	Y.	1,475
Huile essentielle de pétrole.	Y.	1,544
Essence de térébenthine	Br.	1,475
»	Y.	1,476
» ordinaire.	W.	1,476
»	C.	1,482
»	Y.	1,485
» ordinaire	H.	1,486
» purifiée.	W.	1,470
» p. spécif. 0,874.	N.	1,471

TABLEAU VI. (Suite.)

5° BAUMES.		
Baume de Canada.	W.	1,528
»	Y.	1,532
»	Br.	1,549
Baume de copahu.	W.	1,507
»	Y.	1,514
»	Y.	1,516
»	Br.	1,528
Baume de Judée	Y.	1,529
Baume de Pérou	Y.	1,593
»	Br.	1,597
»	Y.	1,605
Téréhenthine	Y.	1,545
» de Chio.	Y.	1,545
» »	Br.	1,557
Baume de tolu.	W.	1,600
»	Y.	1,610
»	Y.	1,627
»	Br.	1,628
6° LIQUIDES QUI NE PEUVENT SE RANGER DANS AUCUNE DES CATÉGORIES PRÉCÉDENTES.		
Acétone. . . . . +	J.	1,3591
Acétate de methylène. . . . . +	J.	1,359
Albumine.	W.	1,360
Alcool (+ J)	W.	1,37
»	C.	1,371
»	H.	1,372
»	Br.	1,374
»	Y.	1,377
» p. sp. 0,866.	N.	1,370
Amylène. . . . . +	J.	1,487
Ammoniac. Liquéfié par la pression, il possède un indice qui surpasse ceux de l'eau et de tous les autres gaz liquefiés et cités ici.	F.	
Ammoniac liquéfié par refroidissement.	. . .	1,752
Blanc d'œuf de poule.	Br.	1,361
»	Y.	1,359

TABLEAU VI. (Suite.)

Bioxyde d'azote. Liquéfié par la pression, il réfracte un peu moins que l'eau.		F.	
Baume de soufre		Y.	1,494
»		Br.	1,497
Camphrone.	+	J.	1,503
Chlore. Liquéfié par pression, il réfracte moins que l'eau.		F.	
Chloral.	+	J.	1,461
Chlorure d'antimoine..		W.	1,420
» dans l'alcool.		W.	1,410
Cire fondue.		Y.	1,453
» »		M.	1,4503
» bouillante.		M.	1,4416
» blanche fondue.		Y.	1,462
Cyanogène, condensé par pression, il semble réfracter moins que l'eau.		F.	
Cyanogène.		Br.	1,316
Dissolution alcoolique d'iode..		Mx.	1,384
» de phosphore dans le sulfure de carbone. .		Mx.	1,708
» alcoolique d'azotate d'alumine.		W.	1,422
» de soufre dans le sulfure de carbone. . .		Mx.	1,693
Eau.		N.	1,336
»		W.	1,336
»		Br.	1,336
» pour la zone rouge du spectre.		Br.	1,330701
»	—	J.	1,333
Eau de fontaine.		E.	1,33[illegible]6
Eau de Seltz		E.	1,3353
Eau-de-vie.		Y.	1,360
Eau de Cologne.		Mx.	1,382
Esprit de savon.		E.	1,4088
Ether		W.	1,358
»		Y.	1,374
» dont le volume fut triplé par la chaleur. . . .		Br.	1,0570
» acétique.	+	J.	1,367
» azotique.	+	J.	1,381
» benzoïque.	+	J.	1,503
» iodhydrique	+	J.	1,503
» œnanthique	+	J.	1,4119
» oxalique	+	J.	1,4068

TABLEAU VI. (Suite.)

Glu.	Y.	1,506
» presque dure.	Y.	1,553
Glycérine. 0	J.	1,413
Goudron du gaz. . . . . +	J.	1,768
Humeur vitrée de l'œil de l'homme.	W.	1,336
» » »	Br.	1,3394
» » »	Y.	1,340
» » du bœuf.	Mr.	1,3371
» » du mouton.	Y.	1,345
Humeur vitrée de l'œil du cabillaud.	M.	1,3531
» » du pigeon.	Y.	1,353
Humeur aqueuse de l'œil de l'homme.	Br.	1,3366
» » de bœuf.	Mr.	1,3358
» » du stockfisch.	Y.	1,341
Hydrogène sulfuré. Liquéfié par pression il réfracte un peu plus que l'eau.	F.	
Jaune d'œuf.	Y.	1,428
Liqueur des Hollandais bromée (bromure d'élayle). . +	J.	1,532
Liquides découverts par Brewster dans des cavités de cristaux :		
1) dans la topaze, très-dilatable.	Br.	1,1311
2) dans la topaze, moins dilatable à 83° F. . . .	Br.	1,2946
3) dans l'améthyste à 83° 1/2 F.	Br.	1,2106
Miel.	Y.	1,495
Mucus de la poitrine.	Y.	1,339
Protochlorure de soufre.	H.	1,67
Pus.	Y.	1,395
Rhum	Y.	1,360
Salive	Y.	1,339
Sang humain.	Y.	1,354
Spermacéti fondu.	W.	1,446
» »	Y.	1,454
Suif fondu.	W.	1,460
Suc d'écorces d'oranges.	Y.	1,403
Sulfure de carbone.	H.	1,68
»	Br.	1,678
» à — 0°, 56.	Brl.	1,642
» à — 13°, 89.	Brl.	1,634
» à — 28°, 89.	Brl.	1,625

TABLEAU VI. (Suite.)

Thériaque	W.	1,500
Vin de Porto	Y.	1,351
B. CORPS SOLIDES.		
1) RÉSINES ET GOMMES.		
Aloës	Y.	1,634
» +	J.*	1,619
Assa fœtida	Y.	1,575
Asphalte de Judée +	J.*	1,579
Benjoin	Y.	1,586
»	Y.	1,596
Caoutchouc (gomme élastique)	W.	1,524
»	Br.	1,534
»	Y.	1,557
Colophane	W.	1,543
» +	J.*	1,545
Copal	W.	1,535
» +	J.*	1,528
»	Br.	1,549
»	Y.	1,553
Gaïac	Y.	1,550
»	W.	1,596
»	Y.	1,600
»	Br.	1,619
Gomme arabique	Br.	1,512
» +	J.*	1,480
»	W.	1,514
» encore humide	Y.	1,513
» p. sp. 1,375	N.	1,476
Gomme adragante	Br.	1,520
»	W.	1,66
Gomme ammoniac	Y.	1,578
»	Br.	1,592
Gomme de genévrier	Br.	1,538
»	Y.	1,541
Gomme laque	W.	1,52 +
»	Br.	1,525

TABLEAU VI. (Suite.)

Gomme laque	Y.	1,528
Jalap	Y.	1,608
Mastic	W.	1,535
»	Y.	1,539
»	Br.	1,560
Myrrhe	Y.	1,517
»	Br.	1,524
Oliban	Y.	1,546
»	Br.	1,554
»	Y.	1,532
»	Br.	1,544
Poix	W.	1,531
»	Y.	1,581
»	Br.	1,586
»	Y.	1,588
» de Bourgogne	Y.	1,546
» »	Br.	1,560
Résine animée	W.	1,535
» »	Y.	1,546
» élemi	W.	1,535
» »	Br.	1,547
» »	Y.	1,550
Sang dragon	Y.	1,562
Sagapenum	Y.	1,545
Scammonium	Y.	1,510
Succin	W.	1,547
» p. sp. 1,04	N.	1,556
» +	J.*	1,530
2) GRAISSES.		
Beurre froid	Y.	1,474
»	W.	1,480
Castoréum	Y.	1,620
»	Br.	1,626
Cire froide	Y.	1,492
»	Y.	1,507
»	W.	1,542
Cire blanche	W.	1,535

TABLEAU VI. (Suite.)

Cire à 14° R	M.	1,5125
Savon de Naples	Y.	1,479
» de Windsor	Y.	1,487
Spermaceti froid	Y.	1,503
»	W.	1,535
Suif froid	W.	1,49
»	Y.	1,492
3) VERRES ET CORPS VITREUX.		
Verre d'antimoine.	W.	1,980
»	Br.	2,216
» . . . . +	J.	2,010
»	J.*	2,013
Borate de plomb, pour le rouge extrême.	H.	1,866
Silicate de plomb. (Équivalents égaux) pour le rouge extrême.	H.	2,123
Borate de plomb . . . . +	J.*	1,825
Crown-glass anglais.	W.	1,500
» français.	W.	1,504
» anglais, pour le rouge extrême	H.	1,5133
» anglais.	Bsc.	1,514
» hollandais.	W.	1,517
» commun.	W.	1,525
» en feuilles.	Bsc.	1,526
» de Dollond, taillé en prisme, pour le rouge extrême.	H.	1,526
» en feuilles.	Br.	1,527
» »	Bsc.	1,529
» autre prisme de Dollond, pour le rouge extrême.	H.	1,5301
» en plaque jaune, poids spécifique 2,52. . .	C.	1,532
» de Radcliff.	W.	1,533
» »	W.	1,536
»	Br.	1,534
»	Br.	1,544
Verre en table.	Bsc.	1,538
» »	Bsc.	1,542
» p. sp. 2,76..	C.	1,573

TABLEAU VI. (Suite.)

Verre vieux	W.	1,545
» à bouteilles	Br.	1,582
» de Saint-Gobain	W.	1,543
Flint-glass	Br.	1,576
»	H.	1,578
»	W.	1,583
» de Dollond, taillé en prisme, pour le rouge extrême	H.	1,584
» pour le rouge extrême	H.	1,585
»	W.	1,586
»	Bsc.	1,590
»	Bsc.	1,593
»	Bsc.	1,594
»	Br.	1,596
» prisme de Dollond, rouge extrême	H.	1,601
»	H.	1,602
»	Bsc.	1,604
»	Br.	1,604
»	M.	1,6055
»	Br.	1,616
»	Bsc.	1,625
» Matthiesen A +	J.*	1,685
» Faraday B +	J.*	1,755
» Guinaud C	J.	1,710
» »	J.*	1,714
» E.	J.	1,614
» » +	J.*	1,615
» F.	J.	1,574
» » +	J.*	1,579
Verre composé de 1 p. borax, 2 p. de silice	Br.	1,522
» rouge rosé	Br.	1,570
» rouge rubis	Br.	1,601
» rouge pourpre	Br.	1,608
» vert	Br.	1,615
» rouge hyacinthe	Br.	1,647
» orangé	Br.	1,695
» rouge, coloré par l'or	Br.	1,715
» rouge foncé	Br.	1,729
» rouge +	J.*	1,490

TABLEAU VI. (Suite.)

Verre composé de 1 p. plomb, 2 silice		Br.	1,724
» » 3 » 4 »		Br.	1,732
» » 1 » 1 »		Z.	1,787
» » 2 » 1 »		W.	1,987
» » 3 » 1 »		Z.	2,028
» opalin		Br.	1,635
»	+	J.*	1,487
» vert	+	J.*	1,527
Strass D, incolore	+	J.	1,580
» »	+	J.*	1,593
» vert		J.	1,620
» »	+	J.*	1,638
» bleu foncé	+	J.*	1,597
» rouge rose foncé	+	J.	1,618
» »	+	J.*	1,618
Fausse pierre fine orangée		Br.	1,782
Calcédoine		Br.	1,553
Cornaline	+	J.*	1,534
Obsidienne		Br.	1,488
Opale (en partie hydrophane)		Br.	1,479
Silex résinite bleu	—	J.*	1,439
Hyalite	—	J.*	1,421
Ménilite	0	J.*	1,482
Opale de feu	+	J.*	1,623
Tabasheer de Vellore, diaphane jaunâtre		Br.	1,1111
» translucide de Nagpore		Br.	1,1454
» » »		Br.	1,1503
» variété la plus blanche de Nagpore		Br.	1,1825
» de Hyderabad		Br.	1,1115
4) CORPS QUI NE PEUVENT SE PLACER DANS AUCUN DES GROUPES PRÉCÉDENTS.			
Acide arsenieux	+	J.*	1,692
Anthracite	+	J.*	1,720
Acide phosphorique solide		Br,	1,544
» » hydraté		Br.	1,442
» » »		Y.	1,441
Beurre d'antimoine sec		Y.	1,504
» » exposé deux jours à l'air		Y.	1,613

TABLEAU VI. (Suite.)

Corne	Br.	1,565
»	W.	1,58 —
Cornée de mouton.	Y.	1,386
Colle de farine desséchée.	Y.	1,426
Colle. . . . . +	J.	1,520
»	J.*	1,509
Cristallin de l'œil humain à la surface.	Br.	1,3767
» » » dans l'intérieur.	Br.	1,3786
» » » au centre.	Br.	1,3990
» » » vers le milieu.	Br.	1,383
Cristallin de l'œil d'agneau à la surface.	Y.	1,386
» » » dans l'intérieur.	Y.	1,428
» » » au centre.	Y.	1,436
Cristallin de l'œil de morue à la surface	Y.	1,410
» » » au centre.	Y.	1,439
» » » au milieu.	Mr.	1,5492
» » » au centre.	Mr.	1,5929
Cristallin de l'œil de bœuf.	W.	1,380
» » »	W.	1,447
» » »	E.	1,463
» » » vers le milieu.	Mr.	1,4747
» » » à la surface.	Mr.	1,4293
» » » au centre.	Mr.	1,5425
Cristallin de l'œil de pigeon.	Y.	1,406
» desséché de l'œil du bœuf et cristallin d'un poisson.	W.	1,530
Ecaille de tortue.	Br.	1,591
Empois d'amidon desséché.	Y.	1,504
Epiderme humain.	W.	1,514
» »	W.	1,517
Houille. . . . . +	J.*	1,701
Jaune d'œuf desséché.	Y.	1,500
Litharge. . . . . +	J.*	2,076
Manne.	Y.	1,533
» brulée	Y.	1,547
» »	Y.	1,565
Nacre de perles.	Br.	1,653
Opium.	Y.	1,559
»	W.	1,57 —

TABLEAU VII (1).

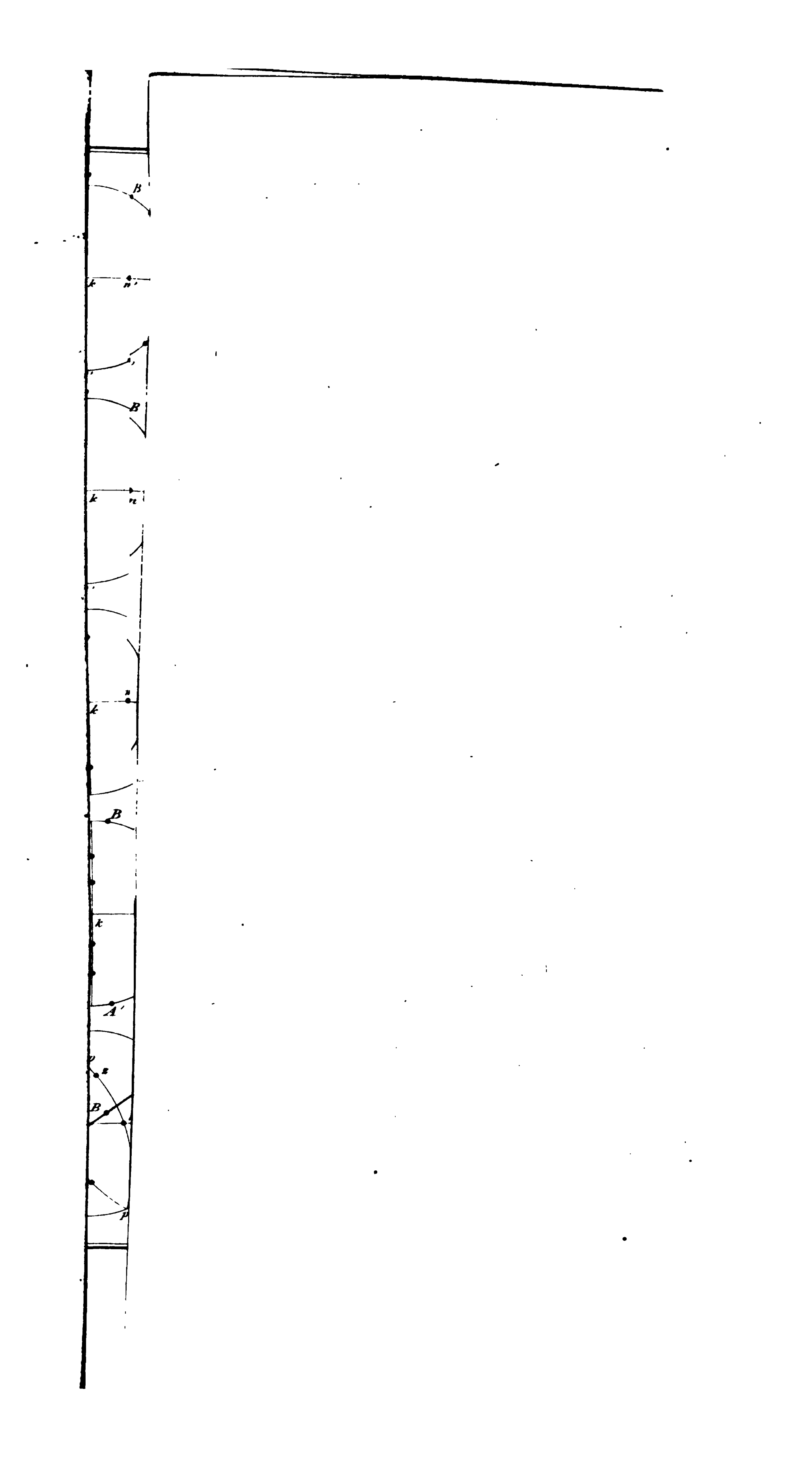
MILIEUX RÉFRINGENTS.	DENSITÉS.	INDICES.
Alcool et eau, à 16° C., mélangés dans la proportion de . . . 1,0 : 0,0	0,796	1,3633
» » » . . . 0,9 : 0,1	0,829	1,3653
» » » . . . 0,8 : 0,2	0,856	1,3662
» » » . . . 0,7 : 0,3	0,880	1,3651
» » » . . . 0,6 : 0,4	0,902	1,3633
» » » . . . 0,55 : 0,45	0,916	1,3629
» » » . . . 0,5 : 0,5	0,9275	1,3621
» » » . . . 0,4 : 0,6	...	1,3592
» » » . . . 0,3 : 0,7	0,960	1,3544
» » » . . . 0,2 : 0,8	0,972	1,3471
» » » . . . 0,1 : 0,9	0,984	1,3407
» » » . . . 0,0 : 1,0	1,000	1,3339
Alcool à 16° C., contenant une trace d'eau.	...	1,3639
» avec 1 — 2 °/₀ d'eau	...	1,3641
» avec 20 °/₀ d'eau.	...	1,3660
» du commerce avec 20 °/₀ d'eau.	...	1,3660
Acide acétique cristallisé à 16°	1,063	1,3753
» aqueux au maximum de densité, à 16°. . .	...	1,3781
»	1,0728	1,3712
»	1,062	1,3670
Esprit de bois et eau, à 9°, mélangés dans la proportion de . . . 1,0 : 0,0	0,807	1,3358
» » » . . . 0,9 : 0,1	0,8371	1,3405
» » » . . . 0,8 : 0,2	0,8619	1,3429
» » » . . . 0,7 : 0,3	0,8873	1,3452
» » » . . . 0,6 : 0,4	0,9072	1,3462
» » » . . . 0,5 : 0,5	0,9232	1,3462
» » » . . . 0,4 : 0,6	0,9429	1,3452
» » » . . . 0,3 : 0,7	0,9576	1,3428
» » » . . . 0,2 : 0,8	0,9709	1,3394

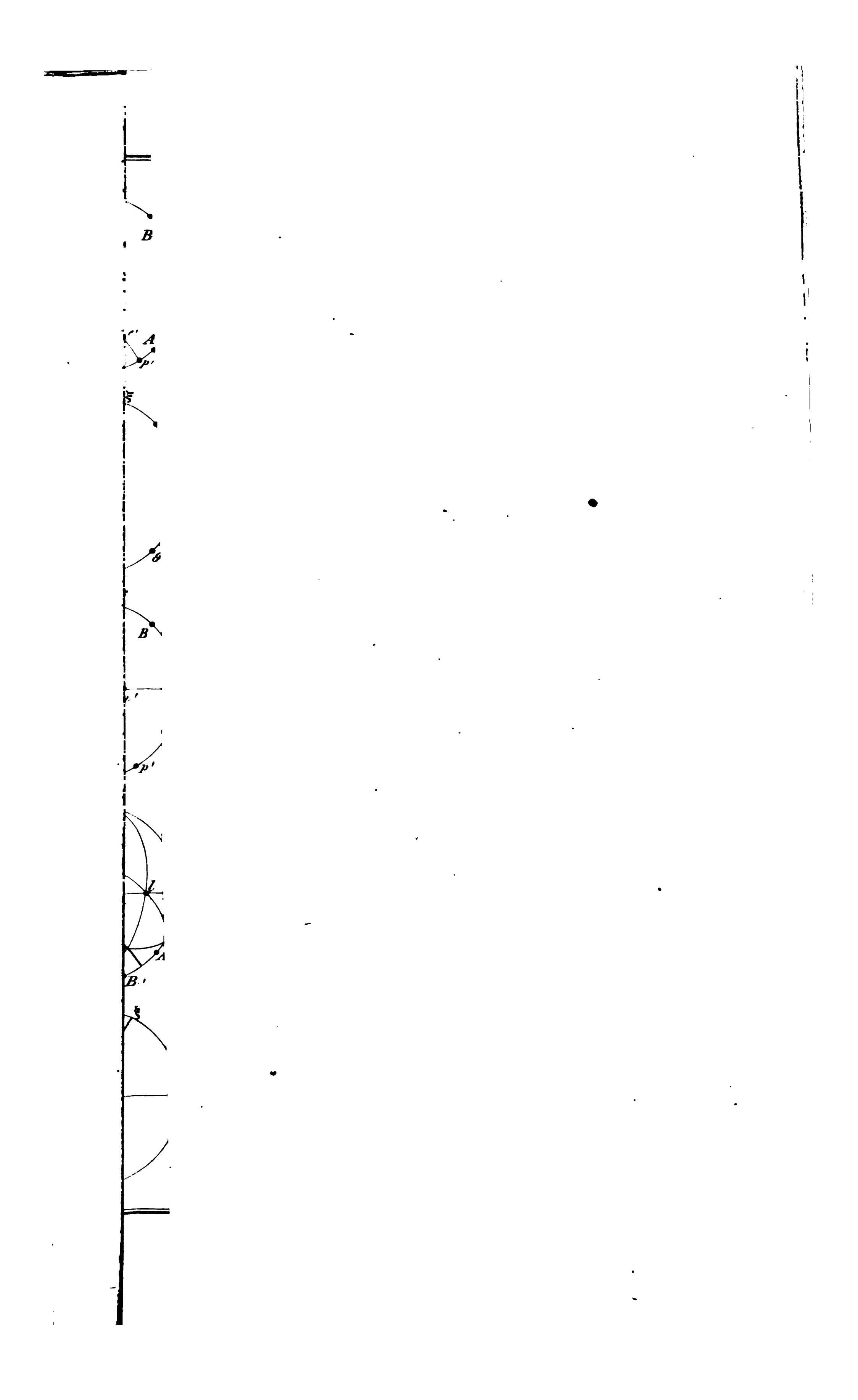
(1) Extrait du travail : Sur les indices de réfraction de M. Deville, *Ann. Pogg.*, LVII.

TABLEAU VII. (Suite.)

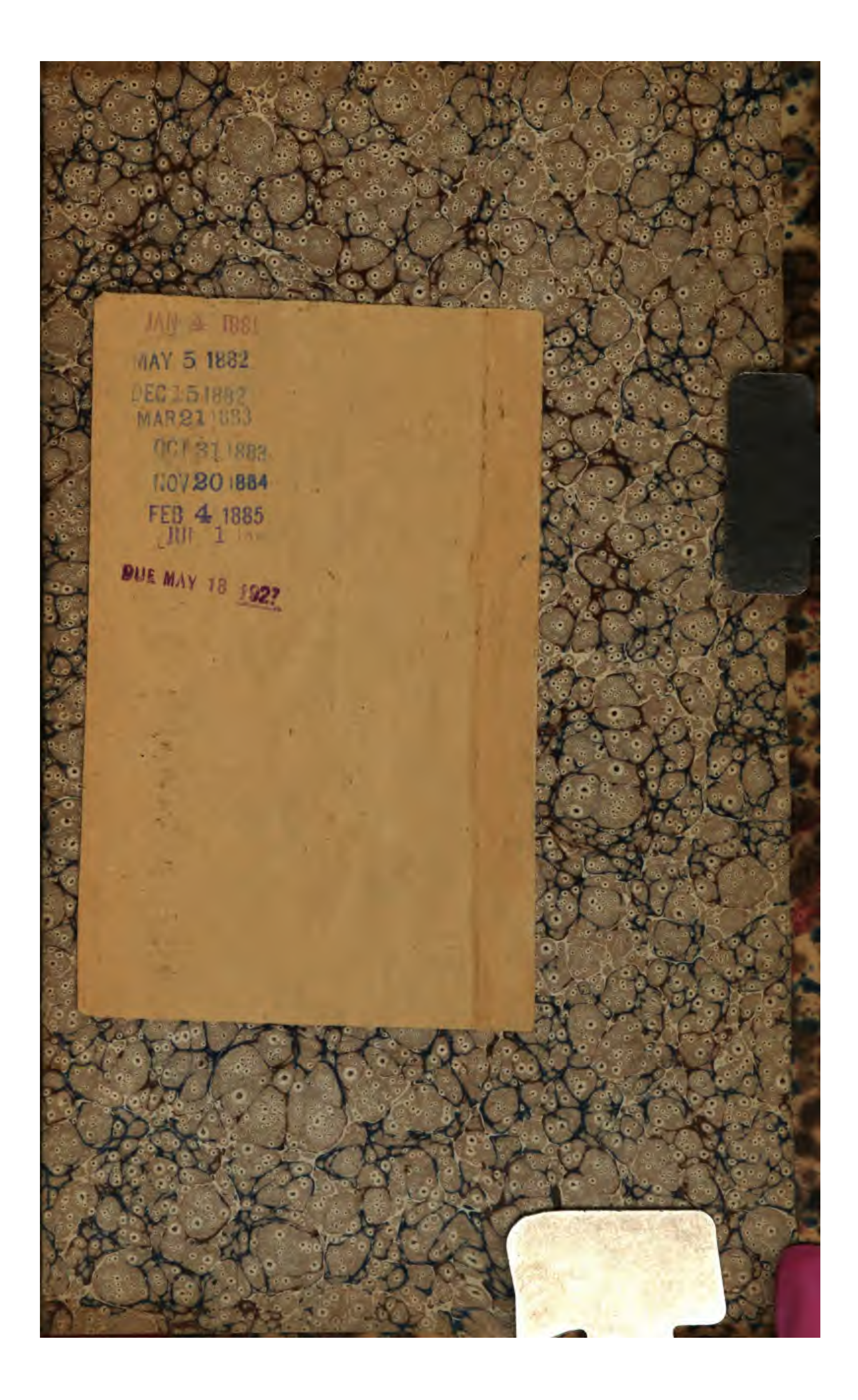
MILIEUX RÉFRINGENTS.		DENSITÉS.	INDICES.
Esprit de bois et eau à 9°, mélangés dans la proportion de	0,1 : 0,9	0,9751	1,3380
Esprit de bois et eau à 9°, mélangés dans la proportion de	0,05 : 0,95	0,9857	1,3360
Esprit de bois et eau à 9°, mélangés dans la proportion de	0,0 : 1,0	1,0000	1,333
Esprit de bois, 1 éq. avec 3 éq. d'eau		...	1,3465

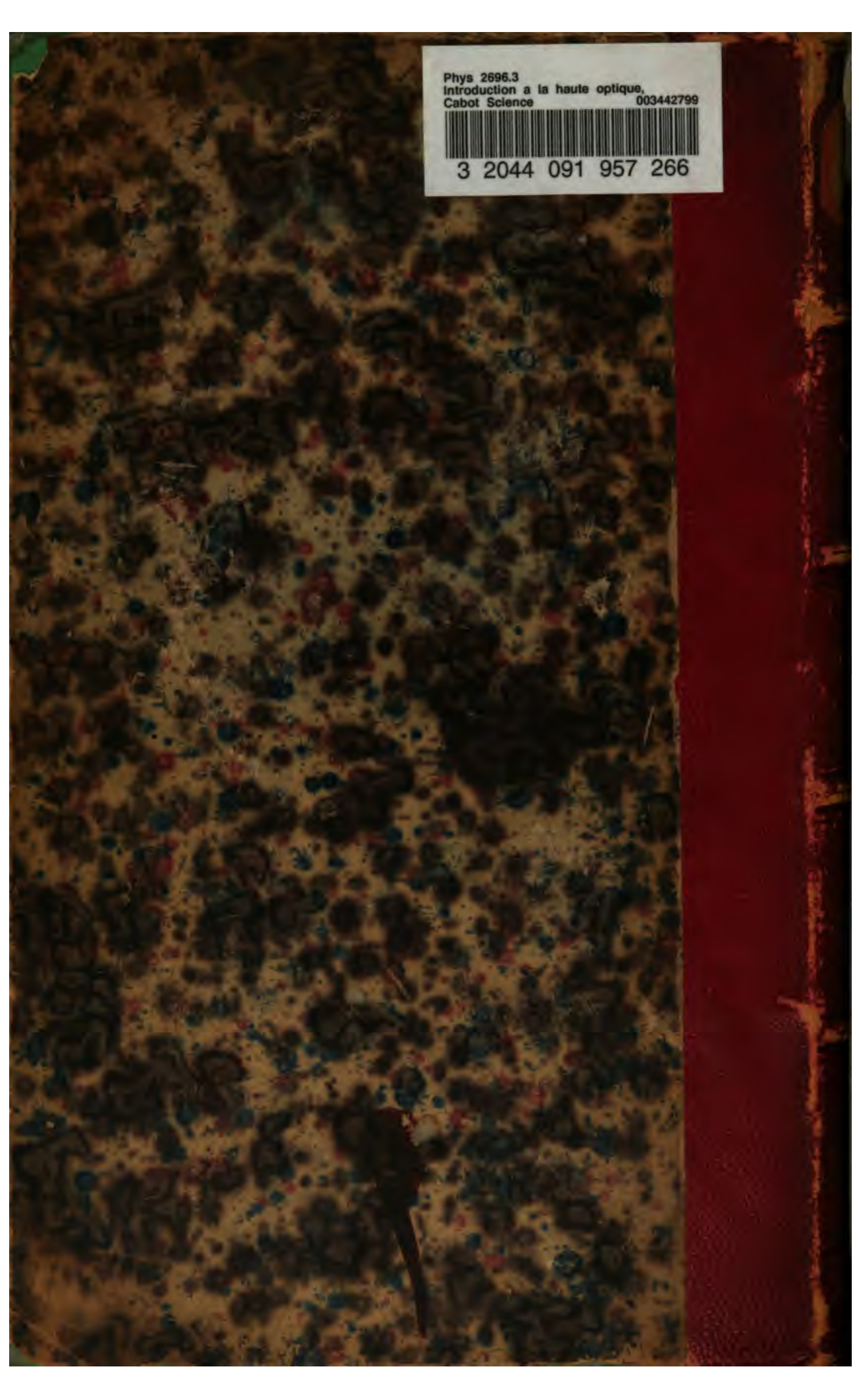
FIN.


B
k
n'
B
k
n
n
k
B
k
A'
z
B
p








Phys 2696.3
Introduction a la haute optique,
Cabot Science 003442799
3 2044 091 957 266